

# Lineare Algebra 1

Mitschrieb von Martin Salzer \*

---

\*Vorlesung im WS 08/09, Dozent: Prof. Dr. W. Kratz, Übungsleiterin: K. Setzer

# 1 Vektorräume

## 1.1 Gruppen und Körper

**Definition 1.1.1** (Gruppe). Eine nichtleere Menge  $G$  mit einer sogenannten inneren Verknüpfung  $\circ$  (d.h. eine Abbildung  $G \times G \rightarrow G$ ) heißt Gruppe, falls die folgenden Eigenschaften (= Gruppenaxiome) gelten:

$$[(G\ 1)]$$

(i)  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$  für alle  $a, b, c \in G$

Es gibt (mindestens) ein Element  $e \in G$  (rechtsneutrales Element) so daß gilt:

(ii)  $a \circ e = a$  für alle  $a \in G$

(iii) für alle  $a \in G$  gibt es mindestens ein Element  $a' \in G$  mit der Eigenschaft  $a \circ a' = e$

Die Gruppe  $G$  heißt abelsch falls zusätzlich gilt:

(iv)  $a \circ b = b \circ a$  für alle  $a \in G$  (Kommutativgesetz)

**Bemerkung:** Für eine innere Verknüpfung gilt gemäß Definition 1.1.1:  $a \circ b \in G$  (Abgeschlossenheit)

**Beispiel:**

(i)  $G = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  mit  $\circ = \cdot$  ist keine Gruppe. Beweis: Falls  $a \cdot e = a$  für alle  $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  so folgt  $e = 1$  und für  $2 \in \mathbb{Z}$  gibt es kein  $a' \in \mathbb{Z}$  mit  $2a' = 1$

**Satz 1.1.1.** Es sei  $G$  eine Gruppe,  $e \in G$  gemäß Def. 1.1.1. Dann gilt

(i)  $a'a = e \quad \forall a, a' \in G$  mit  $aa' = e$  (d.h.  $a'$  ist auch ein linksinversives Element)

(ii)  $ea = a \quad \forall a \in G$  (d.h.  $e$  ist auch ein linksneutrales Element)

(iii) Es gibt genau ein neutrales Element in  $G$

(iv) Für alle  $a \in G$  gibt es genau ein Element  $a' \in G$  mit  $aa' = e$ , das mit  $a^{-1}$  bezeichnet wird.

(v)  $(a^{-1})^{-1} = a \quad \forall a \in G$

(vi)  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \quad \forall a, b \in G$

(vii) Für alle  $a, b, c \in G$  gelten die Implikationen  $ab = ac \Rightarrow b = c$  und  $ba = ca \Rightarrow b = c$

Beweis.

(i) Es seien  $aa' = e$  ( $a, a' \in G$ )

$$\begin{aligned} \stackrel{(G3)}{\Rightarrow} \exists a'' \in G \text{ mit } a'a'' = e &\Rightarrow e = a'a'' \stackrel{(G2)}{=} (a'e)a'' \stackrel{\text{Annahme}}{=} (a'(aa'))a'' \stackrel{(G1)}{=} \\ (a'a)(a'a'') &= (a'a)e = a'a = e \end{aligned}$$

- (ii) Es sei  $a \in G \Rightarrow \exists a'$  mit  $aa' = e \Rightarrow ea = (aa')a = ae$
- (iii) Es sei  $\tilde{e} \in G$  mit  $a\tilde{e} = a \forall a, e \in G$  Zu zeigen ist  $\tilde{e} = e$   
 $\tilde{e} = e\tilde{e} = e$
- (iv) Es sei  $a \in G$  und  $a', \tilde{a}$  mit  $aa' = e$  und  $a\tilde{a} = e$  Zu zeigen  $a' = \tilde{a}$   
 $a' = a'e = a'(a\tilde{a}) = (a'a)\tilde{a} = e\tilde{a} = \tilde{a}$
- (v) Es sei  $a \in G \Rightarrow aa^{-1} = e \Rightarrow a^{-1}a = e \Rightarrow a = (a^{-1})^{-1}$
- (vi) Es seien  $a, b \in G: (ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = (ae)a^{-1} = aa^{-1} = e$   
 $\Rightarrow b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1}$
- (vii) Es seien  $a, b, c \in G$  mit  $ab = ac \Rightarrow b = eb = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) \stackrel{\text{Annahme}}{=} a^{-1}(ac) =$   
 $(a^{-1}a)c = c \Rightarrow b = c$
- (viii) Nun gelte  $ba = ca \Rightarrow b = be = b(aa^{-1}) = (ba)a^{-1} \stackrel{\text{Annahme}}{=} (ca)a^{-1} = c(aa^{-1}) =$   
 $c \Rightarrow b = c$

□

**Bemerkung:** Für  $+$  („additive Gruppe“) gilt also:  $-(-a) = a, -(a+b) = (-b) + (-a)$

**Satz 1.1.2.** Eine nichtleere Menge  $G$  mit einer Verknüpfung  $\circ$  ist genau dann eine Gruppe, wenn (G1) gilt. Und für je zwei Elemente  $a, b \in G$

$$(*) \begin{cases} \exists x \in G : a \circ x = b \text{ und} \\ \exists y \in G : y \circ a = b \end{cases}$$

Dann sind  $x$  und  $y$  eindeutig bestimmt und gegeben durch  $x = a^{-1} \circ b$  und  $y = b \circ a^{-1}$

*Beweis.*

- (i) Es sei  $G$  eine Gruppe  $\Rightarrow$  Es gilt (G1) gemäß Definition 1.1.1. Nun seien  $a, b \in G$   
Setzen  $x := a^{-1} \circ b \in G$  und  $y := b^{-1} \circ a \in G \Rightarrow a \circ x = a \circ (a^{-1} \circ b) = (a^{-1} \circ a) \circ b =$   
 $e \circ b = b. y \circ a = (b \circ a^{-1}) \circ a = b \circ (a^{-1} \circ a) = b \circ e = b \Rightarrow$  Es gilt (\*)
- (ii) Nun gelte (G1) und (\*)  $\Rightarrow$  (G1) gilt und es sei  $b \in G$  weil  $G \neq \emptyset \Rightarrow \exists x =: e$  mit  
 $b \circ e = b$  Es sei  $a \in G \Rightarrow \exists y \in G$  mit  $y \circ b = a \Rightarrow a = y \circ b = y \circ (b \circ e) \Rightarrow$   
 $(y \circ b) \circ e = ae \Rightarrow a = ae \quad \forall a \in G \quad$  Es gilt (G2).  
und es gilt auch (G3) weil  $a \circ a' = e$  für alle  $a \in G$  eine Lösung besitzt  $\Rightarrow G$  ist  
eine Gruppe

$x$  und  $y$  sind eindeutig gemäß Satz 1.1.1 (vii) ( $b = a \circ \tilde{x} = a \circ x \Rightarrow \tilde{x} = x$ )

□

**Definition 1.1.2.** Eine Menge  $K$  mit mindestens 2 Elementen und mit zwei inneren Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$  genannt Addition und Multiplikation (also  $(a, b) \rightarrow a + b \in K$  und  $(a, b) \rightarrow a \cdot b \in K$ ) heißt Körper, wenn die folgenden Eigenschaften, genannt Körperaxiome gelten:

$$(A1) \quad (a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in K$$

Es gibt ein Element  $0 \in K$ , das Nullelement, so dass gilt:

$$(A2) \quad a + 0 = a \quad \forall a \in K$$

$$(A3) \quad \text{für alle } a \in K \text{ gibt es ein negatives Element } -a \in K \text{ mit } a + (-a) = 0$$

$$(A4) \quad a + b = b + a \quad a, b \in K$$

$$(M1) \quad (ab)c = a(bc) \quad \forall a, b, c \in K$$

Es gibt ein Element  $1 \in K$ , das Einselement, so dass gilt:

$$(M2) \quad a \cdot 1 = a \quad \forall a \in K$$

$$(M3) \quad \text{für alle } a \in K \text{ mit } a \neq 0 \text{ gibt es ein inverses Element } a^{-1} \in K \text{ mit } aa^{-1} = 1$$

$$(M4) \quad ab = ba \quad a, b \in K$$

$$(D) \quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \forall a, b, c \in K$$

### **Bemerkung:**

(i) *Gemäß Def 1.1.1 und 1.1.2 sind also  $K$  mit  $+$  und  $K \setminus \{0\}$  mit  $\cdot$  abelsche Gruppen, und damit gelten die Sätze 1.1.1 und 1.1.2 „insbesondere“:  $-(-a) = a$ ,  $(-a) + (-b) = -(a + b)$  und  $(a^{-1})^{-1} = a$ ,  $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \quad \forall a, b \in K \setminus \{0\}$*

(ii) *Weitere Konsequenzen der Körperaxiome sind die üblichen Bruchrechenregeln und Potenzregeln (Vergleiche Analysis I)*

(iii) *Schreibweise und Konventionen:*

- $ab + cd := (ab) + (cd)$
- $a - b := a + (-b)$
- $a : b = \frac{a}{b} := ab^{-1}$  falls  $b \neq 0$
- $a + b + c := (a + b) + c$
- $abc := (ab)c$

**Beispiele und Bezeichnungen:**  $\mathbb{R}$  (reelle Zahlen),  $\mathbb{Q}$  (rationale Zahlen) sind Körper (siehe Analysis I), natürliche Zahlen  $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\mathbb{Z}$  ganze Zahlen

## 1.2 Die Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Motivation: Die Gleichung  $x^2+1=0$  besitzt keine reelle Lösung  $x \in \mathbb{R}$ , weil  $x^2+1 \leq 1 > 0$

Man führt die sogenannte imaginäre Einheit  $i$  ein mit  $i^2 = -1$  und betrachtet alle Zahlen der Form  $a + bi$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  und deren Darstellung in der sogenannten Gaußschen Zahlenebene, genauer: [Skizze]

**Definition 1.2.1.** Der Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen enthält  $\mathbb{R}$ , und ein Element  $i \in \mathbb{C}$ , so daß gilt:

$$(i) \quad i^2 = -1 \text{ und}$$

$$(ii) \quad z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \text{es gibt eindeutig bestimmte reelle Zahlen } a, b \text{ mit } z = a + bi, \text{ also} \\ \mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

**Beispiele und Bezeichnungen:** Für  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  heißt  $a = \Re z$  der Realteil und  $b = \Im z$  der Imaginärteil von  $z$  und  $\bar{z} := a - bi$  die zu  $z$  konjugiert komplexe Zahl sowie  $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$  der Betrag von  $z$

Aus den Körperaxiomen ergeben sich die folgende *Rechenregeln*: Für  $z = a + bi$ ,  $w = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$  mit  $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(i) \quad z \pm w = (a \pm \alpha) + (b \pm \beta)i$$

$$(ii) \quad z \cdot w = (a\alpha - b\beta) + (a\beta + b\alpha)i$$

$$(iii) \quad \frac{z}{w} = \frac{a\alpha + b\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{b\alpha - a\beta}{\alpha^2 + \beta^2}i, \text{ falls } w \neq 0$$

$$(iv) \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$(v) \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$(vi) \quad |z|^2 = z\bar{z}$$

$$(vii) \quad |zw| = |z| \cdot |w|$$

*Beweis.*

$$(i) \quad (a + bi) + (\alpha + \beta i) = (a + \alpha) + (b + \beta)i$$

$$(ii) \quad (a + bi) \cdot (\alpha + \beta i) = (a\alpha - b\beta) + (a\beta + b\alpha)i$$

$$(iii) \quad \frac{(a+bi)}{(\alpha+\beta i)} = \frac{(a+bi)}{(\alpha+\beta i)} \cdot \frac{\alpha-\beta i}{\alpha-\beta i} = \frac{a\alpha+b\beta}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{b\alpha-a\beta}{\alpha^2+\beta^2}i, \text{ falls } (\alpha + \beta i) \neq 0$$

$$(iv) \quad \overline{(a + bi) + (\alpha + \beta i)} = \overline{(a + \alpha) + (b + \beta)i} = (a + \alpha) - (b + \beta)i = \overline{(a + bi)} + \overline{(\alpha + \beta i)}$$

$$(v) \quad \overline{(a + bi) \cdot (\alpha + \beta i)} = \overline{(a\alpha - b\beta) + (a\beta + b\alpha)i} = (a\alpha - b\beta) - (a\beta + b\alpha)i = (a\alpha - (-b)(-\beta)) + (a(-\beta) + (-b)\alpha)i = \overline{(a + bi)} \cdot \overline{(\alpha + \beta i)}$$

$$(vi) |z|^2 = z\bar{z}$$

$$(vii) |(a + bi)(\alpha + \beta i)| = |(a + bi)| \cdot |(\alpha + \beta i)|$$

□

**Beispiele:**  $(3 + i)(2 - i) = 7 - i$ ,  $\frac{2-i}{5+2i} = \frac{8}{29} - \frac{11}{29}i$ ,  $|3 + 4i| = 5$

### 1.3 Der Begriff des Vektorraumes

**Definition 1.3.1.** *Es sei  $K$  ein Körper. Ein Vektorraum über  $K$  ist eine nichtleere Menge mit einer inneren Verknüpfung  $+$  und einer skalaren Multiplikation (d.h. einer Abbildung  $K \times V \rightarrow V$ ,  $(\alpha, a) \mapsto \alpha a \in V \forall \alpha \in K, a \in V$ ), so daß folgende Eigenschaften, die sogenannten Vektorraumaxiome gelten.*

$$(A1) (a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in V$$

*Es gibt ein Element  $0 \in V$ , der Nullvektor, so dass gilt:*

$$(A2) a + 0 = a \quad \forall a \in V$$

$$(A3) \text{ für alle } a \in V \text{ gibt es einen negativen Vektor } -a \in V \text{ mit } a + (-a) = 0$$

$$(A4) a + b = b + a \quad a, b \in V$$

$$(M1) (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a) \quad \forall \alpha, \beta \in K, a \in V$$

$$(M2) 1 \cdot a = a \quad \forall a \in V$$

$$(D1) \alpha(a + b) = (\alpha a) + (\alpha b) \quad \forall \alpha \in K, a, b \in V$$

$$(D2) (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a \quad \forall \alpha, \beta \in K, a \in V$$

**Bemerkungen und Bezeichnungen:** (i) (A1) bis (A4) besagen  $V$  mit „+“ ist eine abelsche Gruppe

(ii) Elemente  $a, b, c, x, \dots \in V$  nennen wir Vektoren und die Elemente  $\alpha, \beta, \gamma, \phi \in K$  nennen wir Zahlen oder Skalare

(iii) Man nennt einen Vektorraum über  $K$  auch einen  $K$ -Vektorraum oder einfach einen linearen Raum. In der „Regel“ ist  $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$

Aus Sätzen 1.1.1 und 1.1.2 folgt:

**Proposition 1.3.1.** *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$ , dann gilt:*

(i) *Es gibt genau einen Nullvektor  $0 \in V$  mit (A2)*

- (ii) Für alle  $a \in V$  gibt es genau einen negativen Vektor  $-a \in V$  mit  $a + (-a) = 0$
- (iii)  $-(-a) = a$ ,  $-(a + b) = (-a) + (-b) \quad \forall a, b \in V$
- (iv) Für alle  $a$  und  $b$  aus  $V$  gibt es immer genau ein  $x \in V$  mit  $a + x = b$  und zwar  $x = b + (-a)$

**Proposition 1.3.2.** *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$ . Dann gilt:*

- (i) Für  $\alpha \in K$  und  $a \in V$  gilt:  $\alpha a = 0$  genau dann wenn  $\alpha = 0$  oder  $a = 0$  gilt.
- (ii)  $(-1)a = -a \quad \forall a \in V$

*Beweis.*

- (i) Es sei  $a \in V \Rightarrow 0a = 0a + (0a - (0a)) = (0a + 0a) - (0a) = (0 + 0)a - (0a) = 0a - (0a) = 0$  Es sei  $a \in K \Rightarrow \alpha 0 = \alpha 0 + (\alpha 0 - (\alpha 0)) = (\alpha 0 + \alpha 0) - (\alpha 0) = \alpha(0 + 0) - (\alpha 0) = \alpha 0 - (\alpha 0) = 0$

Nun sei  $\alpha \in K, a \in V$  mit  $\alpha a = 0$  und es sei o.B.d.A.  $\alpha \neq 0 \Rightarrow a = 1a = (\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha)a = \frac{1}{\alpha}(\alpha a) \stackrel{\text{Annahme}}{=} \frac{1}{\alpha} 0 \stackrel{1.\text{Teil}}{=} 0 \Rightarrow$  Es gilt (i)

- (ii)  $a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 - 1)a = 0a \stackrel{(i)}{=} 0 \Rightarrow -1 \cdot a = -a$

□

**Beispiele:**

- (i) Ebene  $V = \mathbb{R}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$  ist ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$

- (ii) Allgemeine  $V = K^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$  ist ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ ,

$$\text{wobei } n \in \mathbb{N}, K \text{ Körper } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \text{ [Rest}$$

ist klar]

- (iii) Funktionenraum  $V = \{f \mid f : M \rightarrow K\}$  ist ein Vektorraum über  $K$ , wobei  $M \neq \emptyset, K$  Körper.  $(f + g)(t) = f(t) + g(t), (\alpha f)(t) = \alpha f(t) \quad \forall t \in M$   
Beachte  $K^n = \{f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow K\}$

**Definition 1.3.2.** *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$ . Eine Teilmenge  $U \subset V$  heißt Unterraum von  $V$  (auch ein Teilraum von  $V$ ), falls gilt: (i)  $U \neq \emptyset$ , (ii)  $a + b \in U \forall a, b \in U$ , (iii)  $\alpha a \in U \forall a \in U, \alpha \in K$*

**Bemerkung:** (ii) und (iii)  $\Leftrightarrow \alpha a + \beta b \in U \quad \forall a, b \in U, \alpha, \beta \in K$

**Beispiele:**

(i)  $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \mid x + y = 0 \right\}$  ist ein Unterraum des  $\mathbb{R}^2$

(ii)  $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$  ist kein Unterraum des  $\mathbb{R}^2$

(iii) Alle Unterräume des  $\mathbb{R}^2$  sind  $\mathbb{R}^2$ ,  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ , Geraden durch den Nullpunkt

(iv) Alle Unterräume des  $\mathbb{R}^3$  sind  $\mathbb{R}^3$ ,  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ , Geraden durch den Nullpunkt, Ebenen durch den Nullpunkt

**Bemerkung:** Die Vereinigung  $U_1 \cup U_2$  zweier Unterräume eines Vektorraums  $V$  über  $K$  ist im Allgemeinen kein Vektorraum.

**Proposition 1.3.3.** Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$ . Dann gilt:

(i)  $U = V$  und  $U = \{0\}$  sind Unterräume von  $V$ , die sogenannten trivialen Unterräume von  $V$

(ii)  $0 \in U \forall$  Unterräume  $U$  von  $V$

(iii) Eine Teilmenge  $U \subset V$  ist genau dann ein Unterraum von  $V$ , falls  $U$  mit der in  $V$  erklärten Addition und skalaren Multiplikation selbst wieder ein Vektorraum über  $K$  ist.

*Beweis.*

(i) trivial

(ii)  $U$  sei ein Unterraum von  $V \Rightarrow U \neq \emptyset$  gemäß Definition 1.3.2 (i) d.h.  $\exists a \in U \Rightarrow 0a \in U$  und  $0a = 0$  nach Proposition 1.3.2  $\Rightarrow$  Es gilt (ii)  $0 \in U$

(iii) Es sei  $U$  selbst ein Vektorraum über  $K \stackrel{Def.1.3.2}{\Rightarrow} U$  ist ein Unterraum von  $V$ , weil  $U \neq \emptyset$  und  $a + b \in U \forall a, b \in U, \alpha a \in U \forall \alpha \in K, a \in U$

Nun sei  $U \subset V$  ein Unterraum von  $V \Rightarrow U \neq \emptyset$ ,  $+$  ist eine innere Verknüpfung (Def. 1.3.2 (ii)) und ist eine skalare Multiplikation in  $U$  Def. 3.2 (iii). Außerdem gelten die Vektorraumaxiome.

(A1) gilt erst Recht auf einer Teilmenge

(A3)  $a \in U \Rightarrow (-a) \stackrel{Prop.3.2(i)}{=} (-1)a \in U \Rightarrow A3$

(Rest) analog zu (A1)

□

**Proposition 1.3.4.** *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$  und  $U_1$  und  $U_2$  seien Unterräume von  $V$ . Dann sind der Durchschnitt  $U_1 \cap U_2$  und die Summe  $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1 \text{ und } u_2 \in U_2\}$  auch wieder ein Unterraum von  $V$*

Zusatz:  $U_1 \cap U_2 \subset U_1 + U_2$

*Beweis.*

- (i)  $U_1 \cap U_2 \subset V \neq \emptyset$ , weil  $0 \in U_1 \cap U_2$  gemäß Proposition 1.3.3 (ii). Seien  $a, b \in U_1 \cap U_2$ ,  $\alpha \in K \Rightarrow a + b \in U_1, U_2$ ,  $\alpha a \in U_1$  und  $\alpha a \in U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2$  ist ein Unterraum von  $V$
- (ii)  $0 = 0 + 0 \in U_1 + U_2 \neq \emptyset$ , Seien  $a_1, b_1 \in U_1, a_2, b_2 \in U_2$ ;  $a = a_1 + a_2 \in U_1 + U_2, b = b_1 + b_2 \in U_1 + U_2, \alpha \in K \Rightarrow a + b = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \in U_1 + U_2, \alpha a = \alpha(a_1 + a_2) = (\alpha a_1) + (\alpha a_2) \in U_1 + U_2$

Zusatz:  $a \in U_1, 0 \in U_2 \Rightarrow a = a + 0 \Rightarrow a \in U_1 + U_2 \Rightarrow U_1 \subset U_1 + U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 \subset U_1 + U_2$  □

**Definition 1.3.3.** *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$*

- (i) *Ein Vektor  $x \in V$  heißt Linearkombination von Vektorraum  $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$  falls  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$  existieren mit  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$  man sagt auch  $x$  lässt sich linear kombinieren.*
- (ii) *Für eine Teilmenge  $T \subset V, T \neq \emptyset$  heißt die Menge  $\langle T \rangle = \text{Lin } T := \{x \in V | x \text{ lässt sich aus Vektoren von } T \text{ linear kombinieren}\}$  die lineare Hülle von  $T$ , oder der von  $T$  aufgespannte Raum. Wir bilden  $\text{Lin } \emptyset := \{0\}$*
- (iii) *Für einen Unterraum  $U$  von  $V$  heißen  $a_1, a_2, \dots, a_n \in U$  ein (endliches) erzeugendes System von  $U$ , falls gilt  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = U$*

**Proposition 1.3.5.** *Es seien  $V$  ein Vektorraum über  $K$  und  $T \subset V$ . Dann gilt  $\text{Lin } T$  ist ein Unterraum von  $V$  und zwar der kleinste Unterraum die die Menge  $T$  enthält.*

*Beweis.*  $0 \in \text{Lin } T$ , also  $\text{Lin } T \neq \emptyset$ . Nun seien  $x = \sum_{\nu=0}^n \alpha_\nu a_\nu$  und  $y = \sum_{\nu=0}^m \beta_\nu b_\nu \in \langle T \rangle$  (d.h.  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in T$  und  $\alpha_\nu, \beta_\nu \in K \forall \nu$ ) und  $\alpha \in K \rightarrow x + y \in \text{Lin } T$ ,  $\alpha x = \sum_{\nu=0}^n (\alpha \alpha_\nu) a_\nu \in \text{Lin } T \rightarrow \text{Lin } T$  ist ein Unterraum von  $V$  mit  $T \subset \text{Lin } T$ , weil  $a = 1a$  (Linearkombination)  $\in \text{Lin } T \forall a \in T$

Nun sei  $U \subset V$  ein Unterraum von  $V$  mit  $T \subset U$ . Dann ist z.Z  $\text{Lin } T \subset U$  Dazu sei  $x \in \text{Lin } T$ , d.h.  $x = \sum_{\nu=0}^n \alpha_\nu a_\nu$  mit  $a_1, \dots, a_n \in T, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$   $\xRightarrow{\text{Vollständige Induktion nach } n \in \mathbb{N}}$   $x \in U$

$n = 1$  :  $x = \alpha_1 a_1$  mit  $a_1 \in T, \alpha_1 \in K \Rightarrow x = \alpha_1 a_1 \in U$   
 $n \rightarrow n + 1$  :  $x = \sum_{\nu=0}^{n+1} \alpha_\nu a_\nu = \left( \sum_{\nu=0}^n \alpha_\nu a_\nu \right) + (\alpha_{n+1} a_{n+1}) \xRightarrow{U \text{ ist UR}} \in U$  □  
 $\in U$  nach Ind. Vorr.  $\in U$

**Bemerkung:** Ein Vektorraum ist gerade diejenige Struktur, in der man Linearkombinationen bilden kann und mit ihnen „wie üblich“ rechnen kann.

## 1.4 Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension

**Bemerkung:** Eine „Menge“, in der Elemente mehrfach auftreten können, nennt man Familie, genauer:

**Definition 1.4.1.** Unter einer Familie  $T$  aus einer Menge  $X$  verstehen wir eine Abbildung  $\phi : I \rightarrow X$  mit der Indexmenge  $I$ , und einer Restriktion  $\phi|_J$  von  $\phi$  auf  $J \subset I$  nennt man eine Teilfamilie von  $T$ . Für  $I = \emptyset$  sprechen wir von der leeren Familie.

**Bemerkung:**  $a_1, \dots, a_n \in X$  ist eine Familie  $T$  aus  $X$ , nämlich  $I = \{1, \dots, n\}$ ,  $\phi(\nu) = a_\nu$  für  $\nu = 1, \dots, n$  wir schreiben  $T = (a_1, \dots, a_n) \forall a_\nu \in T$  für  $\nu = 1, \dots, n$  Zum Beispiel ist  $\{a_1, a_5, a_7\}$  eine Teilfamilie von  $\{a_1, \dots, a_8\}$ ,  $I = \{1, \dots, 8\}$ ,  $J = \{1, 5, 7\} \subset I$

**Definition 1.4.2.** Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$ .

(i) Vektoren  $a_1, \dots, a_n \in V$  heißen linear unabhängig (l.u.), falls gilt: Sind  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  mit  $\sum_{\nu=0}^n \alpha_\nu a_\nu = 0$ , so folgt stets  $\alpha_\nu = 0 \forall \nu = 1, \dots, n$ . Die Vektoren heißen linear abhängig, wenn sie nicht linear unabhängig sind.

(ii) Eine Familie  $T$  aus  $V$  heißt linear unabhängig falls jede endliche Teilfamilie gemäß (i) linear unabhängig ist, und andernfalls heißt sie l.a. Die leere Familie heißt l.u.

**Bemerkung:** Vektoren  $a_1, \dots, a_n \in V$  sind linear abhängig  $\Leftrightarrow$  Es gibt  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  und  $k \in \{1, \dots, n\}$  mit  $\alpha_k \neq 0$  und  $\sum_{\nu=0}^n \alpha_\nu a_\nu = 0$ , d.h. es gibt eine nichttriviale Linearkombination von  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , die „verschwindet“ (zum Nullvektor wird)

**Beispiele:**

(i)  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 = V$  sind l.u. **Beweis:** Es seien  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0$  und  $2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 2\alpha_1 \Rightarrow 3\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$  und  $\alpha_2 = 0$

(ii)  $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  sind l.a., weil  $2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii)  $V = K^n$  Die kanonischen Einheitsvektoren  $e_\nu := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \nu.\text{te Koordinate} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  sind linear un-

abhängig, weil  $0 = \sum_{\nu=0}^n \alpha_\nu e_\nu = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_\nu = 0 \forall \nu = 1, \dots, n$

**Proposition 1.4.1.** *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$ ,  $a_1, \dots, a_n \in V$ .  $T$  sei eine Familie aus  $V$ . Dann gilt:*

(i)  $a_1, \dots, a_n$  sind linear abhängig  $\Leftrightarrow$  Einer der Vektoren ist eine LK der anderen, d.h.  $\exists k \in 1, \dots, n$  und  $\alpha_\nu \in K$  mit  $a_k = \sum_{\nu=1, \nu \neq k}^n \alpha_\nu a_\nu$ .

(ii)  $a$  ist l.u.  $\Leftrightarrow a \neq 0$

(iii)  $a_1, \dots, a_n$  sind l.u.  $\Rightarrow a_\mu \neq a_\nu \forall \mu \neq \nu$ , d.h.  $a_\nu$  sind paarweise verschieden.

(iv)  $T$  ist linear unabhängig  $\Rightarrow$  Jede Teilfamilie von  $T$  ist l.u.

(v)  $T$  ist l.u.  $\Leftrightarrow$  Jeder Vektor  $b \in \text{Lin } T$  besitzt eine eindeutige Darstellung als Linearkombination von Vektoren aus  $T$

*Beweis.*

(i)  $a_1, \dots, a_n$  sind l.a.  $\Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K, k \in \{1, \dots, n\}$  mit  $\alpha_k \neq 0$  und  $\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu a_\nu = 0 \Rightarrow a_k = \sum_{\nu=1, \nu \neq k}^n -\frac{\alpha_\nu}{\alpha_k} a_\nu$ . Nun sei  $a_k = \sum_{\nu=1, \nu \neq k}^n \alpha_\nu a_\nu = 0 \Rightarrow \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu a_\nu = 0$  mit  $\alpha_k = -1 \neq 0$

(ii)  $a \neq 0, \alpha a = 0 \xrightarrow{\text{Prop. 1.3.2}} \alpha = 0 \Rightarrow a$  ist l.u. Nun sei  $a = 0 \Rightarrow 1 \cdot a = 0$  mit  $1 \neq 0 \Rightarrow a$  ist l.a.

(iii) Es sei  $a_\mu = a_\nu$  mit  $\mu \neq \nu \Rightarrow \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu a_\nu = 0$  für  $\alpha_\nu = 0 \forall \nu \notin \{\mu, \nu\}$  und  $\alpha_\nu = 1, \alpha_\mu = -1 \Rightarrow a_1, \dots, a_n$  sind l.a.

(iv) folgt direkt aus Definition 1.4.2

(v)  $T$  sei l.u. und es sei  $b = \sum_{\nu=1}^m \beta_\nu b_\nu = \sum_{\nu=1}^n \gamma_\nu b_\nu$  mit  $b_1, \dots, b_n \in T$  und  $\beta_\nu, \gamma_\nu \in K \Rightarrow 0 = b - b = \sum_{\nu=1}^m (\beta_\nu - \gamma_\nu) b_\nu$   $b_1, \dots, b_n$  sind l.u.  $\Rightarrow \beta_\nu = \gamma_\nu \forall \nu = 1, \dots, n$  d.h. die Darstellung ist eindeutig.

$T$  sei l.a.  $\Rightarrow \exists b_1, \dots, b_m \in T, \beta_1, \dots, \beta_m$  mit  $\beta_k \neq 0$  und  $\sum_{\nu=1}^m \beta_\nu b_\nu = \sum_{\nu=1}^m 0 b_\nu \Rightarrow$  Der Nullvektor hat keine eindeutige Darstellung

□

**Bemerkung:**  $a_1, \dots, a_n$  sind l.u. und  $\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu a_\nu = 0 = \sum_{\nu=1}^n \beta_\nu a_\nu \Rightarrow \alpha_\nu = \beta_\nu \forall \nu = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$  Koeffizientenvergleich ist erlaubt!

**Definition 1.4.3.** *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$ . Eine Familie  $T$  aus  $U$  heißt eine Basis von  $V$ , falls gilt:  $\text{Lin } T = V$  und  $T$  ist l.u.*

**Beispiele:**

(i)  $\emptyset$  ist Basis des Nullraums  $\{0\}$ , weil  $\text{Lin } \emptyset = \{0\}$  und  $\emptyset$  per Definition l.u. ist

(ii)  $T = (e_1, \dots, e_n)$  ist eine Basis des  $K^n$ , die sogenannte kanonische Basis, weil  $T$  ist l.u. und  $a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu e_\nu \in \text{Lin } T \forall a \in K^n$

**Proposition 1.4.2.** *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$  und  $T$  sei eine Familie aus  $V$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (i)  $T$  ist eine Basis von  $V$
- (ii) Jeder Vektor  $a \in V$  besitzt eine eindeutige Darstellung als Linearkombination von Vektoren aus  $T$ , d.h. es gibt  $a_1, \dots, a_n \in T$  und eindeutige Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  mit  $a = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu a_\nu$ , man nennt  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  die *Koordinaten* von  $a$  bzgl.  $T$
- (iii)  $\text{Lin } T = V$  und  $\text{Lin}(T \setminus \{a\}) \neq V \quad \forall a \in T$
- (iv)  $T$  ist linear unabhängig und  $T \cup \{a\}$  ist l.a.  $\forall a \in V \setminus T$  (unverlängerbar)

*Beweis.*

(ii) (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) gemäß Definition 4.3 und Proposition 4.1 (v)

(iii) (i)  $\Rightarrow$  (iii): Es gelte (i)  $\Rightarrow \text{Lin } T = V$ , und es sei  $a \in T \Rightarrow a \notin \text{Lin}(T \setminus \{a\})$  gemäß Proposition 1.4.1 (i), weil  $T$  l.u. ist  $\Rightarrow \text{Lin}(T \setminus \{a\}) \neq V \Rightarrow$  es gilt (iii)

(iii)  $\Rightarrow$  (i): Es gelte (i) nicht  $\Rightarrow \text{Lin } T \neq V$  oder  $T$  ist l.a. Es sei also o.B.d.A.  $T$  ist l.a.  $\Rightarrow \exists a \in T$  mit  $a \in \text{Lin}(T \setminus \{a\}) \Rightarrow a \in \text{Lin}(T \setminus \{a\}) \Rightarrow \text{Lin}(T \setminus \{a\}) = \text{Lin } T = V \Rightarrow$  Es gilt (iii) nicht. [Platzhalter]

(iv) (i)  $\Rightarrow$  (iv): Es gelte (i)  $\Rightarrow T$  ist l.u., und es sei  $a \in V \setminus T \Rightarrow a = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu a_\nu$  mit  $a_1, \dots, a_n \in T$ , weil  $\text{Lin } T = V$  (gemäß (i))  $\Rightarrow T \cup \{a\}$  ist l.a. gemäß Proposition 1.4.1. (i)  $\Rightarrow$  (iv)

(iv)  $\Rightarrow$  (i): Es gelte (i) nicht  $\Rightarrow T$  ist l.a. oder  $\text{Lin } T \neq V$ . Es sei also o.B.d.A.  $\text{Lin } T \neq V \Rightarrow \exists a \in V \setminus T$  mit  $a \notin \text{Lin } T \Rightarrow T \cup \{a\}$  ist linear unabhängig  $\Rightarrow$  (iv) gilt nicht.

□

**Satz 1.4.1** (Basisauswahlsatz). *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$  und  $T = (a_1, \dots, a_n)$  eine Familie aus  $V$  mit  $\text{Lin } T = V$ , d.h.  $T$  ist ein endliches erzeugendes System von  $V$ . Dann gibt es eine Teilfamilie  $\tilde{T}$  von  $T$ , die eine Basis von  $V$  ist.*

*Sprechweise: Ein Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem heißt endlich erzeugt*

*Beweis.* Es sei  $V \neq \{0\}$ , sonst ist  $\emptyset$  Basis von  $\{0\}$  mit  $\emptyset \subset T$ . Definiere  $m := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \exists k \text{ Vektoren aus } T, \text{ die } V \text{ aufspannen}\} \Rightarrow 1 \leq m \leq n$ , weil  $\text{Lin } T = V$  und es gibt  $m$  Vektoren  $a_{\nu_1}, \dots, a_{\nu_m} \in T$  mit  $\text{Lin}\{a_{\nu_1}, \dots, a_{\nu_m}\} = V \Rightarrow \tilde{T} = \{a_{\nu_1}, \dots, a_{\nu_m}\} \subset T$  ist Basis von  $V$  gemäß Proposition 4.2 (iii)  $\square$

**Lemma** (Austauschlemma). *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$  und  $T = (a_1, \dots, a_n)$  sei eine Basis von  $V$ ,  $a = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu a_\nu \in V$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$  mit  $\alpha_k \neq 0$ . Dann ist auch  $\tilde{T} = (a_1, \dots, a_{k-1}, a, a_{k+1}, \dots, a_n)$  eine Basis von  $V$ .*

*Beweis.* Z.z. (i)  $\tilde{T}$  ist l.u. und (ii)  $\text{Lin } \tilde{T} = V$

(i) Dazu sei  $0 = \sum_{\nu=1}^{n-1} \beta_\nu a_\nu + \beta a$  (o.B.d.A  $k = n$ )  $\Rightarrow 0 = \sum_{\nu=1}^{n-1} \beta_\nu a_\nu + \beta \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu a_\nu = \sum_{\nu=1}^{n-1} (\beta_\nu + \beta \alpha_\nu) a_\nu + \beta \alpha_n a_n$  (Der Nullvektor ist nun dargestellt als LK von den Vektoren  $a_1, \dots, a_n$ )  $\stackrel{a_\nu \text{ l.u.}}{\Rightarrow} \beta \alpha_n = 0$  und  $\beta_\nu + \alpha_\nu \beta = 0 \stackrel{\alpha_n \neq 0}{\Rightarrow} \beta = 0$  und  $\beta_\nu = 0 \quad \forall \nu = 1, \dots, n-1$

(ii) Dann sei  $b \in V \Rightarrow b \in \text{Lin } T = V \Rightarrow b = \sum_{\nu=1}^n \beta_\nu a_\nu \Rightarrow b = \sum_{\nu=1}^{n-1} \beta_\nu a_\nu + \beta_n \left( \frac{1}{\alpha_n} a - \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\alpha_\nu}{\alpha_n} a_\nu \right) \Rightarrow b = \sum_{\nu=1}^{n-1} \left( \beta_\nu - \beta_n \frac{\alpha_\nu}{\alpha_n} \right) a_\nu + \frac{\beta_n}{\alpha_n} a$  [LK aus  $(a_1, \dots, a_{n-1}, a)$ ]  $\in \text{Lin } \tilde{T}$   $\square$

**Satz 1.4.2** (Austauschsatz von Steinitz). *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$ ,  $T = (a_1, \dots, a_n)$  eine Basis von  $V$ , und  $b_1, \dots, b_m \in V$  linear unabhängig. Dann ist  $m \leq n$  und es gibt Vektoren  $a_{\nu_1}, \dots, a_{\nu_m} \in T$ , so daß sich nach Austausch von  $a_{\nu_1}, \dots, a_{\nu_m}$  gegen  $b_1, \dots, b_m$  wieder eine Basis von  $V$  ergibt.*

*Beweis.* Induktion nach  $m \in \mathbb{M}$

(i)  $m = 1$ :  $n \geq 1$  und  $b_1 = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu a_\nu \in V = \text{Lin } T$ , weil  $T$  Basis ist,  $b_1$  ist linear unabhängig  $\Rightarrow b_1 \neq 0 \Rightarrow \exists k \in \{1, \dots, n\}$  mit  $\alpha_k \neq 0$ ,  $b_1$  kann gegen  $a_{\nu_1} := a_k$  ausgetauscht werden gemäß dem Austauschlemma.

(ii)  $m \rightarrow m+1$ :  $b_1, \dots, b_{m+1}$  seien l.u.  $\stackrel{\text{Prop. 4.1}}{\Rightarrow} b_1, \dots, b_m$  sind l.u.  $\stackrel{\text{Ind. Hyp.}}{\Rightarrow} m \leq n$  und  $b_1, \dots, b_m$  können gegen gewisse  $m$  Vektoren ausgetauscht werden. Es sei also  $\{b_1, \dots, b_m, a_{m+1}, \dots, a_n\}$  eine Basis von  $V$  (nach Ummummerierung). Nun ist  $b_{m+1} = \sum_{\nu=1}^m \beta_\nu b_\nu + \sum_{\nu=m+1}^n \beta_\nu a_\nu \in V = \text{Lin}\{b_1, \dots, b_m, a_{m+1}, \dots, a_n\}$ , und  $b_{m+1} \notin \text{Lin}\{b_1, \dots, b_m\}$ , weil  $b_1, \dots, b_{m+1}$  l.u. sind  $\Rightarrow m+1 \leq n$  und  $\exists k \in \{m+1, \dots, n\}$  mit  $\beta_k \neq 0 \Rightarrow b_{m+1}$  kann gegen  $a_{\nu_{m+1}} := a_k$  ausgetauscht werden gemäß dem Austauschlemma  $\square$

**Korollar 1.4.1.** *Es sei  $V$  ein endlich erzeugter Vektorraum über  $K$ . Dann ist jede Basis von  $V$  endlich und alle Basen von  $V$  haben die gleiche Anzahl von Vektoren.*

**Definition 1.4.4.** *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$ . Dann heißt*

$$\dim V = \dim_k V := \begin{cases} n, & \text{falls } V \text{ eine Basis von } v \in \mathbb{N} \text{ Vektoren besitzt} \\ \infty, & \text{falls } V \text{ nicht endlich erzeugt ist} \end{cases}$$

eine Dimension von  $V$  über  $K$

Aus Proposition 1.4.2 und Definition 1.4.4 folgt:

**Korollar 1.4.2.**  $\dim V = \text{Anzahl der Basisvektoren} = \text{Minimalanzahl der Vektoren, die den Raum aufspannen} = \text{Maximalanzahl von Vektoren aus } V, \text{ die l.u. sind.}$

**Beispiele:**

- (i)  $\dim\{0\} = 0$ , weil  $\emptyset$  eine Basis des Nullraums ist.
- (ii)  $\dim K^n = n$  [ $K$  ist ein Körper], weil  $(e_1, \dots, e_n)$  eine Basis des  $K^n$  ist
- (iii)  $V = \{f | f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ ,  $\dim V = \infty$ . Beweis: Betrachte folgende Familie  $T = (e_1, \dots) \subset V$ , wobei  $e_k(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x = k \\ 0 & \text{falls } x \neq k \end{cases}$ . Diese Familie ist l.u., weil  $\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu e_\nu(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$  gilt  $\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu e_\nu(k) = \alpha_k = 0 \Rightarrow$  Behauptung, weil  $T$  l.u. ist und unendlich viele Vektoren enthält.

**Satz 1.4.3** (Basisergänzungssatz). *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$ , und  $T$  sei eine linear unabhängige Familie aus  $V$ . Dann gibt es eine Basis  $B$  von  $V$ , die  $T$  enthält, d.h.  $T \subset B$*

*Beweis.* Für den Fall, dass  $V$  endlich erzeugt ist, d.h.  $\dim V < \infty$ , und nur der Fall wird in dieser Vorlesung benötigt.

Es sei  $\text{Lin}(a_1, \dots, a_n) = V \xrightarrow{\text{Basisauswahlsatz}} \exists \text{ Basis } \tilde{B} \text{ von } V \text{ mit } \tilde{B} \subset (a_1, \dots, a_n) \text{ und } T \text{ ist l.u.} \xrightarrow{\text{Satz 4.2}} \exists \text{ Basis von } V \text{ mit } T \subset B \quad \square$

**Korollar 1.4.3.** *Jeder Vektorraum besitzt eine Basis (Ergänze  $T = \emptyset$  mit dem Basisergänzungssatz (1.4.3))*

**Proposition 1.4.3.** *Sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$  mit  $n = \dim V < \infty$ . Dann gilt:*

- (i) *Eine linear unabhängige Familie aus  $V$  ist genau dann eine Basis wenn sie aus  $n$  Vektoren besteht.*
- (ii) *Für jeden Unterraum  $U$  von  $V$  gilt,  $\dim U \leq n = \dim V$  mit  $=$  genau dann wenn  $U = V$*

*Beweis.*

(i)  $T$  Basis  $\xrightarrow{\text{Def 1.4.3, 1.4.4}} T$  ist l.u. und besteht aus  $n$  Vektoren

$T$  ist l.u. bestehend aus  $n$  Vektoren  $\xrightarrow{\text{Kor. 1.4.2}} T$  ist Basis.

(ii) Es sei  $U$  ein Unterraum von  $V \Rightarrow U \subset V \Rightarrow \dim U \leq \dim V$  mit „ $=$ “  $\Leftrightarrow U = \text{Lin}\{\text{Basis aus } n \text{ Vektoren}\} = V$

$\square$

**Satz 1.4.4** (Dimensionsformel für Unterräume). *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$ , und  $U_1, U_2$  seien Unterräume von  $V$  mit endlichen Dimensionen. Dann gilt  $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$*

*Beweis.* Nun gilt nach Voraussetzung  $l := \dim U_1, m := \dim U_2, k := \dim(U_1 \cap U_2)$  wobei  $l, m < \infty$  und aus Proposition 1.4.3 folgt  $k \leq l, k$

$\dim(U_1 + U_2) = l + m - k$ . Wir konstruieren eine Basis  $B$  von  $U_1 + U_2$  mit  $l + m - k$  Vektoren

Es sei  $\{a_1, \dots, a_k\}$  eine Basis von  $U_1 \cap U_2$  gemäß Korollar 1.4.3. Nun gilt  $U_1 \cap U_2 \subset U_1, U_2$  <sup>Basisergänzungssatz</sup>  $\Rightarrow \exists$  Basen  $\{a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_l\}$  von  $U_1$  und  $\{a_1, \dots, a_k, c_{k+1}, \dots, c_m\}$  von  $U_2$ . Dann besteht  $B = \{a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_l, c_{k+1}, \dots, c_m\}$  aus  $m + l - k$  Vektoren. Wir zeigen  $B$  ist eine Basis von  $U_1 + U_2$

- (i)  $\text{Lin } B = U_1 + U_2$ : Dazu sei  $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, x = u_1 + u_2 \in U_1 + U_2 \Rightarrow u_1 = \sum_{\nu=1}^k \alpha_\nu a_\nu + \sum_{\nu=k+1}^l \beta_\nu b_\nu, u_2 = \sum_{\nu=1}^k \tilde{\alpha}_\nu a_\nu + \sum_{\nu=k+1}^m \gamma_\nu c_\nu \Rightarrow x = \sum_{\nu=1}^k (\alpha_\nu + \tilde{\alpha}_\nu) a_\nu + \sum_{\nu=k+1}^l \beta_\nu b_\nu + \sum_{\nu=k+1}^m \gamma_\nu c_\nu \Rightarrow x \in \text{Lin } B$
- (ii)  $B$  ist linear unabhängig: Dazu sei  $a := \sum_{\nu=1}^k \alpha_\nu a_\nu \in U_1 \cap U_2, b := \sum_{\nu=k+1}^l \beta_\nu b_\nu \in U_1, c := \sum_{\nu=k+1}^m \gamma_\nu c_\nu \in U_2$  mit  $a + b + c = 0 \Rightarrow c = -a - b \Rightarrow c \in U_1 \Rightarrow c \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow c = \sum_{\nu=1}^k \tilde{\alpha}_\nu a_\nu = -\sum_{\nu=1}^k \alpha_\nu a_\nu - \sum_{\nu=k+1}^l \beta_\nu b_\nu \stackrel{\text{Koeff. Vergl.}}{\Rightarrow} \beta_\nu = 0 \Rightarrow \sum_{\nu=1}^k \alpha_\nu a_\nu + \sum_{\nu=k+1}^m \gamma_\nu c_\nu = 0 \Rightarrow \alpha_\nu = \beta_\nu = 0 \Rightarrow B$  ist l.u.

□

**Proposition 1.4.4.** *Zu jedem Unterraum  $U_1$  eines endlich-dimensionalen Vektorraums  $V$  über  $K$  gibt es einen sogenannten Komplementunterraum  $U_2$ , d.h.  $U_2$  ist auch ein Unterraum von  $V$  mit (i)  $U_1 + U_2 = V$  (ii)  $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ , d.h.  $V = U_1 \oplus U_2$*

*Beweis.* Es sei  $\{a_1, \dots, a_k\}$  eine Basis von  $U_1$  gemäß Korollar 1.4.2  $\exists$  Basis  $\{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n\}$  von  $V$  mit  $n = \dim V < \infty$ .

Setze  $U_2 = \text{Lin}\{a_{k+1}, \dots, a_n\}$  ist ein Unterraum von  $V$  mit  $\text{Lin}(U_1 + U_2) = \text{Lin}(a_1, \dots, a_n) = V$  und  $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ , weil  $a_1, \dots, a_n$  l.u. sind □

**Definition 1.4.5.** *Die Summe  $U_1 + U_2$  von Unterräumen eines Vektorraums  $V$  heißt direkt, falls  $U_1 \cap U_2 = \{0\}$  Schreibweise  $U_1 \oplus U_2$*

**Bemerkung:**  $U_1 \oplus U_2 \Leftrightarrow \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 \Leftrightarrow \forall x \in U_1 + U_2$  ist die Darstellung  $x = u_1 + u_2$  mit  $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$  eindeutig

## 2 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

### 2.1 Matrixmultiplikation und Matrixalgebra

**Definition 2.1.1.** *Es seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $K$  ein Körper*

- (i) Ein rechteckiges Zahlenschema bestehend aus  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten mit Matrixelementen  $a_{\mu\nu} \in K$  heißt eine Matrix  $A$  vom Typ  $m \times n$ , kurz  $m \times n$ -Matrix  $A \in K^{m \times n}$ . Wir schreiben:

$$A = (a_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \dots \\ a^m \end{pmatrix}$$

Dann ist  $a_\nu = \begin{pmatrix} a_{1\nu} \\ \dots \\ a_{m\nu} \end{pmatrix} \in K^m \hat{=} \text{die } \nu\text{-te Spalte}$  und  $a^\mu = (a_{\mu 1} \ \dots \ a_{\mu n})$  die  $\mu$ -te Zeile mit  $a^{\nu T} \in K^n$

- (ii) Bei gegebener Matrix  $A = (a_{\nu\mu}) \in K^{m \times n}$  heißt

$$A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{n \times m} \text{ die zu } A \text{ transponierte Matrix}$$

- (iii)  $I = I_{n \times n} = (\delta_{\mu\nu})_{n \times n}$  heißt Einheitsmatrix mit dem Kroneckersymbol  $\delta_{\mu\nu} =$

$$\begin{cases} 1 & \text{falls } \mu = \nu \\ 0 & \text{falls } \mu \neq \nu \end{cases}, \text{ also } I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

$$\text{und } 0 = 0_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ heißt Nullmatrix}$$

- (iv) Die Matrix  $A \in K^{m \times n}$  heißt *quadratisch*, fall  $m = n$  ist

**Bemerkung:** Die Spalten  $a_\nu \in K^m = K^{m \times 1}$  sind  $m \times 1$ -Matrizen und die Zeile  $a^\nu \in K^{1 \times n}$

**Beispiele:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 2-i & 3+2i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \text{ ist quadratisch}$$

**Definition 2.1.2.** (i) Für Matrizen  $A \in K^{m \times n}$  und  $B \in K^{m \times n}$  vom gleichen Typ (über demselben Körper  $K$ ) definieren wir die Summe  $A+B := (a_{\mu\nu} + b_{\mu\nu}) \in K^{m \times n}$

(ii) Für eine Matrix  $A \in K^{m \times n}$  und  $\alpha \in K$  definieren wir  $\alpha A := (\alpha a_{\mu\nu}) \in K^{m \times n}$

### Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, 2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Dann ist also bis auf die „Schreibweise“  $K^{m \times n}$  „gleich“  $K^{m * n}$

**Proposition 2.1.1.** Die Menge  $K^{m \times n}$  aller  $m \times n$ -Matrizen mit Matrixelementen aus dem Körper  $K$  ist mit den beiden Verknüpfungen aus Definition 2.1.2 ein Vektorraum über  $K$  der Dimension  $m * n$

**Definition 2.1.3.** Für 2 Matrizen  $A = (a_{\mu\nu}) \in K^{m \times n}$  und  $B = (b_{\mu\nu}) \in K^{n \times k}$  mit  $n = \text{Spaltenanzahl von } A = \text{Zeilenanzahl von } B$  ist das Matrixprodukt definiert durch  $C = (c_{\mu\nu}) : AB \in K^{m \times k}$  mit  $c_{\mu\nu} := \sum_{\rho=1}^n a_{\mu\rho} b_{\rho\nu}$  für  $\mu = 1, \dots, m$  und  $\nu = 1, \dots, k$

### Beispiele und Bezeichnungen:

(i)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}_{2 \times 3}, BA \text{ ist nicht definiert}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = (AB)^T$$

$$\begin{pmatrix} 1-2i & 5 \\ 0 & 0 \\ -i & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 0 \\ 2-i & 2-i \end{pmatrix}$$

(ii) Es sei also  $K^{m \times n} \ni A = (a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix}$ ,  $K^{n \times k} \ni B = (b_1, \dots, b_k) = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}$

$b = (b_\mu) \in K^m = K^{m \times 1}$  sowie  $x = (x_\nu) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n = K^{n \times 1}$

a)  $AB = (a^\mu b_\nu) = (Ab_1, \dots, Ab_k) = \begin{pmatrix} a^1 B \\ \vdots \\ a^m B \end{pmatrix}$

b)  $Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^n x_\nu a_\nu \in \text{Lin}(a_1, \dots, a_n)$

c)  $Ax = b \Leftrightarrow \begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$  ist ein lineares Gleichungssystem bestehend aus  $m$  Gleichungen mit  $n$  Unbekannten  $x_1, \dots, x_n$  (d.h.  $x \in K^n$ ) bei gegebener Koeffizientenmatrix  $A \in K^{m \times n}$  und gegebener rechter Seite  $b \in K^m$

d)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  Berechne  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  mit  $Ax = b \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(iii) [Platzhalter]

(iv) die Matrixmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ. Das ist klar, wenn die Matrixprodukte „unvergleichbar“ sind, aber auch im Fall  $k = m = n$  (quadratische Matrizen) z.B.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

**Proposition 2.1.2.** Es gelten die folgenden Rechenregeln (Matrixalgebra)

- (i)  $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B) \quad \forall \alpha \in K, A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times k}$
- (ii)  $A(B + C) = AB + AC \quad \forall A \in K^{m \times n}, B, C \in K^{n \times k}$
- (iii)  $(B + C)A = BA + CA \quad \forall A \in K^{m \times n}, B, C \in K^{l \times m}$
- (iv)  $A(BC) = (AB)C \quad \forall A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times k}, C \in K^{k \times l}$
- (v)  $AI_{n \times n} = A$  und  $I_{m \times m}A = A \quad \forall A \in K^{m \times n}$
- (vi)  $(A^T)^T = A, (AB)^T = B^T A^T, (\alpha A)^T = \alpha A^T, (A+C)^T = A^T + C^T \quad \forall A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times k}, C \in K^{m \times n}$

*Beweis.*

(i)-(iii) klar

$$(iv) [A(BC)]_{\mu\nu} = \sum_{\rho=1}^n a_{\mu\rho}(BC)_{\rho\nu} = \sum_{\rho=1}^n a_{\mu\rho}(\sum_{\gamma=1}^k b_{\rho\gamma}c_{\gamma\nu}) = \sum_{\gamma=1}^k (\sum_{\rho=1}^n a_{\mu\rho}b_{\rho\gamma})c_{\gamma\nu} = \sum_{\gamma=1}^k (AB)_{\mu\gamma}c_{\gamma\nu} = [(AB)C]_{\mu\nu}$$

$$(vi) [(AB)^T]_{\mu\nu} = \sum_{\rho=1}^n a_{\nu\rho}b_{\rho\mu} = \sum_{\rho=1}^n b_{\rho\nu}a_{\rho\mu} = \sum_{\rho=1}^n (B^T)_{\nu\rho}(A^T)_{\rho\mu} = (B^T A^T)_{\mu\nu}$$

□

## 2.2 Matrixoperationen und der Gauß-Algorithmus

**Zeilenoperationen** auf  $A = \begin{pmatrix} a^1 \\ \dots \\ a^m \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$  und es sei  $\alpha \in K, 1 \leq \mu \neq \nu \leq n$

(Z1) Addition des  $\alpha$ -fachen der  $\mu$ -ten Zeile zur  $\nu$ -ten Zeile

$$Q_\mu^\nu(\alpha)A = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^{\nu-1} \\ a^\nu + \alpha a^\mu \\ a^{\nu+1} \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ mit } Q_\mu^\nu(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 1_{\nu\nu} & \dots & \alpha_{\nu\mu} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \dots & 1_{\mu\mu} & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Z2) Vertauschen der  $\mu$ -ten Zeile und der  $\nu$ -ten Zeile

$$P_\mu^\nu A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a^\nu \\ \text{\scriptsize } \mu\text{-te Zeile} \\ \vdots \\ a^\mu \\ \text{\scriptsize } \nu\text{-te Zeile} \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ mit } P_\mu^\nu = \begin{pmatrix} 1_{11} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 0_{\mu\mu} & \dots & 1_{\mu\nu} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 1_{\nu\mu} & \dots & 0_{\nu\nu} & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0_{m1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1_{mm} \end{pmatrix}$$

(Z3) Multiplikation der  $\nu$ -ten Zeile  $\alpha \neq 0$

$$S_\mu(\alpha)A = \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha a^\mu \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ mit } S_\mu(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ & & \alpha & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**Fazit:** Zeilenoperationen auf  $A$  sind Multiplikationen der Matrix  $A$  von links mit Elementarmatrizen  $[Q_\mu^\nu(\alpha), P_\mu^\nu, S_\mu(\alpha)]$

**Bemerkung:** Spaltenoperationen auf  $A$  sind Multiplikationen der Matrix  $A$  von rechts

**Beispiel:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{O_1^2(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(Z1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_2^4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_3^4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Zeilenstufenform } A \text{ mit } 3 \text{ Stufen}$$

**Definition 2.2.1.** Eine Matrix  $A$  der Gestalt [Platzhalter] heißt in Zeilenstufenform mit  $r$  Stufen

**Satz 2.2.1** (Gaußsches Eliminationsverfahren). Jede Matrix lässt sich mit endlich vielen Zeilenoperationen vom Typ (Z1) und (Z2) in Zeilenstufenform überführen.

**Beispiel** (Fortführung):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(S3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(S1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(S3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Korollar 2.2.1.** Jede Matrix lässt sich mit endlich vielen Zeilen- und Spaltenoperationen in eine Matrix überführen, bei der die Zeilen und Spalten entweder Einheitsvektoren oder Nullvektoren sind.

## 2.3 Der Rang einer Matrix

**Definition 2.3.1.** Es sei  $A = (a_1 \ \dots \ a_n) = \begin{pmatrix} a^1 \\ \dots \\ a^m \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$ . Dann heißt die Dimension von  $\text{Lin}(a_1, \dots, a_n)$  der Spaltenrang von  $A$  und  $\dim \text{Lin}(a^1, \dots, a^m)$  der Zeilenrang von  $A$

**Proposition 2.3.1.** (i) Die elementaren Zeilen- und Spaltenoperationen lassen den Zeilenrang und den Spaltenrang einer Matrix unverändert

(ii) Ist  $A \in K^{m \times n}$  in Zeilenstufenform mit  $r$ , so gilt  $r = \text{Zeilenrang von } A = \text{Spaltenrang von } A$

*Beweis.*

(i) Wir betrachten o.B.d.A. nur die Zeilenoperationen

a) Diese lassen den Zeilenrang unverändert (Das ist klar für (Z2) und (Z3)) und dies gilt auch für (Z1), weil

$$\dim \text{Lin}(a^1, \dots, a^m) \stackrel{\text{Austauschlemma}}{=} \dim \text{Lin}(a^1, \dots, a^\nu + \alpha a^\mu, \dots, a^m)$$

b) Diese lassen auch den Spaltenrang unverändert. Hinsichtlich (Z1).

$$\sum_{\rho=1}^n \lambda_{\rho} a_{\rho} = 0 \Leftrightarrow \sum_{\rho=1}^n \lambda_{\rho} a_{s\rho} = 0 \forall s = 1, \dots, m \text{ mit } s \neq \nu \text{ und } \sum_{\rho=1}^n \lambda_{\rho} (a_{\nu\rho} + \alpha a_{\mu\rho}) = 0$$

$\Rightarrow$  Spaltenrang bleibt unverändert unter (Z1) und entsprechend auch unter (Z2) und (Z3)

(ii) folgt aus (i) und Korollar 2.2.1 und Satz 2.2.1

□

Aus Definition 2.3.1, Satz 2.2.1 und Proposition 2.3.1 folgt unmittelbar:

**Satz 2.3.1** (Rangatz). *Für jede Matrix  $A \in K^{m \times n}$  gilt Zeilenrang  $A$  = Spaltenrang  $A$*

**Definition 2.3.2.** *Für eine Matrix  $A \in K^{m \times n}$  heißt Rang  $A :=$  Spaltenrang  $A =$  Zeilenrang  $A$*

**Beispiel:** *Berechnung von Rang  $A$  mit Gauß Algorithmus*

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

**Proposition 2.3.2.** *Für Matrizen  $A \in K^{m \times n}$ ,  $B \in K^{n \times k}$  gilt: (i)  $\text{Rang} A = \text{Rang} A^T$  (ii)  $\text{Rang} A \leq \min\{m, n\}$  (iii)  $\text{Rang}(AB) \leq \min\{\text{Rang} A, \text{Rang} B\}$*

*Beweis.*

(i) gilt gemäß Definition 2.3.1 & 2.3.2 und Satz 3.2.1

(ii) gilt gemäß Definition 2.3.1 & 2.3.2 und Satz 3.2.1

(iii)  $A = (a_1, \dots, a_n), B = (b_1, \dots, b_k)$

$$\text{Lin}(a_1, \dots, a_n) = \left\{ \sum_{\nu=1}^n x_{\nu} a_{\nu} \mid x_1, \dots, x_n \in K \right\} = \{Ax \mid x \in K^n\} = \{AB = Ab_1, \dots, Ab_k\}$$

mit  $Ab_{\nu} \in \text{Lin}(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \text{Lin}(Ab_1, \dots, Ab_k) \in \text{Lin}(a_1, \dots, a_n)$

$$\text{Rang}(AB) = \dim \text{Lin}(Ab_1, \dots, Ab_k) \leq \dim \text{Lin}(a_1, \dots, a_n) = \text{Rang} A \quad \text{Rang}(AB) =$$

$$\text{Rang}(AB)^T = \text{Rang}(B^T A^T) \leq \text{Rang} B^T = \text{Rang} B \Rightarrow \text{(iii)}$$

□

## 2.4 Die Gruppe der regulären Matrizen

**Definition 2.4.1.** *Eine quadratische Matrix  $A \in K^{n \times n}$  heißt regulär (invertierbar) falls es eine (inverse) Matrix  $A^{-1} \in K^{n \times n}$  gibt mit  $AA^{-1} = I_{n \times n}$ . Man nennt  $A$  singularär wenn  $A$  nicht regulär ist.*

**Bezeichnung:**  $GL(n, K) := \{A \in K^{n \times n} \mid A \text{ ist regulär}\}$  nennt man die sogenannte *allgemeine lineare Gruppe* („general linear group“)

**Satz 2.4.1** (Regularität). *Eine quadratische Matrix  $A \in K^{n \times n}$  ist genau dann regulär, wenn  $\text{Rang} A = n$  und dann ist auch  $A^{-1}$  regulär*

*Beweis.*

- (i) Es sei  $A$  regulär  $\Rightarrow \exists A^{-1}$  mit  $AA^{-1} = I \Rightarrow n = \text{Rang} I = \text{Rang}(AA^{-1}) \leq \min(\text{Rang} A, \text{Rang} A^{-1}) \leq n \Rightarrow \text{Rang} A = n = \text{Rang} A^{-1}$
- (ii) Es sei  $A = (a_1, \dots, a_n) \in K^{n \times n}$  mit  $\text{Rang} A = n \Rightarrow n = \dim \text{Lin}(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \text{Lin}(a_1, \dots, a_n) = \{Ax \mid x \in K^n\} = K^n \Rightarrow \exists \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$  mit  $A\tilde{a}_\nu = e_\nu \forall \nu = 1, \dots, n$ . Setze  $A^{-1} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) \Rightarrow AA^{-1} = (A\tilde{a}_1, \dots, A\tilde{a}_n) = (e_1, \dots, e_n) = I \Rightarrow A$  ist regulär  $\stackrel{(i)}{\Rightarrow} \text{Rang} A^{-1} = n \Rightarrow A^{-1}$  ist regulär

□

**Satz 2.4.2** (general linear groups). *Die Menge  $GL(n, K)$  aller regulären Matrizen  $A \in K^{n \times n}$  bildet mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe. Diese Gruppe ist nicht abelsch für  $2 \leq n$*

*Beweis.* Die Matrixmultiplikation ist eine innere Verknüpfung auf  $GL(n, K)$ . Zum Beweis seien  $A, B \in GL(n, K) \Rightarrow AB \in K^{n \times n}$  mit  $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I \Rightarrow AB \in GL(n, K)$ .

Nun gilt das Assoziativgesetz (G1) gemäß Proposition 2.1.2 und auch (G2) für  $e = I$  (gemäß Proposition 2.1.2). Für  $A \in GL(n, K)$  gibt es gemäß Definition 2.4.1 ein  $A^{-1} \in K^{n \times n}$  mit  $AA^{-1} = I$  und  $A^{-1} \in GL(n, K)$  gemäß Satz 2.4.1  $\Rightarrow GL(n, K)$  eine Gruppe.

Diese Gruppe ist nicht abelsch für  $n = 2$ . Zum Beweis betrachte  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  und

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = BA$$

□

**Proposition 2.4.1.** *Es seien  $A, B \in GL(n, K)$ . Dann gilt*

(i)  $A^{-1}$  eindeutig mit  $AA^{-1} = I$  und es gilt  $A^{-1}A = I$

(ii)  $(A^{-1})^{-1} = A$

(iii)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(iv)  $A^T \in GL(n, K)$  mit  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(v)  $\text{Rang}(CA) = \text{Rang} C$  und  $\text{Rang}(AC) = \text{Rang}(C) \forall C \in K^{k \times n}$  bzw.  $K^{n \times k}$

*Beweis.*

(i)-(iii) folgt aus Satz 2.4.2 und Satz 1.1.1

$$(iv) A^T(A^{-1})^T \stackrel{\text{Prop. 2.1.2}}{=} (A^{-1}A)^T = I^T = I$$

$$(v) \text{Rang}(CA) \leq \text{Rang}(C) = \text{Rang}(CAA^{-1}) = \text{Rang}(CA)A^{-1} \leq \text{Rang}(CA) \Rightarrow \text{Rang}(CA) = \text{Rang } C$$

□

## Beispiele: 1. Berechnung inverser Matrizen mit dem Gau-Algorithmus

Beobachtung  $Z_k \cdot \dots \cdot Z_1 A = I$  mittels Zeilenoperationen, wobei  $Z_k \cdot \dots \cdot Z_1$  Elementarmatrizen sind.  $\Rightarrow A^{-1} = Z_k \cdot \dots \cdot Z_1 \cdot I \quad (A|I) \xrightarrow{\text{Zeilenoperationen}} (I|A^{-1})$

$$(A|I) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{array} \right)$$

*Zeilenstufenform = A ist regulär*

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Probe: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 2. Lösen linearer Gleichungssysteme mit dem Gauß-Algorithmus

Wenn man aber die inverse Matrix noch nicht kennt, dann liefert folgendes Gaußsches Eliminationsverfahren die Lösung „schneller“

$$\begin{array}{l} x + 2z = 1 \\ y + z = -2 \\ -x + 3z = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beobachtung:  $Ax = b \Leftrightarrow Z_k \cdot \dots \cdot Z_1 A = Z_k \cdot \dots \cdot Z_1 b$ . Gauß-Algorithmus wird angewandt auf die sog. „erweiterte Matrix“  $(A|b)$

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{array} \right)$$

$$\text{d.h. } 5z = 2, y + z = -2, x + 2z = 1 \Rightarrow z = \frac{2}{5}, y = -2 - \frac{2}{5} = -\frac{12}{5}, x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

**Satz 2.4.3** (Cramersche Regel 1. Teil). *Es sei  $A \in K^{n \times n}$  eine quadratische Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i)  $Ax = b$  ist lösbar für alle  $b \in K^n$  (d.h.  $\exists x \in K^n$  mit  $Ax = b$ )
- (ii)  $Ax = 0$  besitzt nur die triviale Lösung  $x = 0$
- (iii)  $A$  ist regulär

Dann ist  $Ax = b$  für alle  $b \in K^n$  eindeutig lösbar, und zwar  $x = A^{-1}b$

*Beweis.* Es seien  $A = (a_1, \dots, a_n) \in K^{n \times n}$  mit  $a_1, \dots, a_n \in K^n$  und  $x = (x_\nu)$

- (i)  $Ax = \sum_{\nu=1}^n x_\nu a_\nu = b \in K^n$  lösbar  $\forall b \Rightarrow \text{Lin}(a_1, \dots, a_n) = K^n, \dim K^n = n \Rightarrow a_1, \dots, a_n$  sind l.u.  $\Rightarrow 0 = Ax = \sum_{\nu=1}^n x_\nu a_\nu \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$  (ii) gilt.
- (ii)  $\Rightarrow a_1, \dots, a_n$  sind l.u.,  $\dim \text{Lin}(a_1, \dots, a_n) = n = \text{Rang } A \Rightarrow A$  ist regulär  $\Rightarrow$  (iii) gilt.
- (iii)  $\Rightarrow \exists A^{-1}$  mit  $AA^{-1} = I = A^{-1}A \Rightarrow Ax = b \Leftrightarrow x = Ix = (A^{-1}A)x = A^{-1}b$  für alle  $b$

□

## 2.5 Lineare Gleichungssysteme

**Definition 2.5.1.** *Bei gegebenem  $A \in K^{m \times n}$  und  $b \in K^m$  heißt  $Ax = b$  ein lineares Gleichungssystem bestehend aus  $m$  Gleichungen und den  $n$  Unbekannten  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  mit der Koeffizienten Matrix  $A$  und rechter Seite  $b$ .*

*Das lineare Gleichungssystem heißt homogen falls  $b = 0$  ist und inhomogen bei beliebiger rechter Seite*

**Bemerkung:** (i) *Es sei  $A$  quadratisch und regulär  $\xrightarrow{\text{Satz 4.3}} Ax = b$  ist lösbar und zwar eindeutig durch  $x = A^{-1}b \forall b \in K^n$*

(ii) *Fragestellungen*

- a) *Lösbarkeit und Eindeutigkeit*
- b) *Struktur der Lösungsgesamtheit*
- c) *Berechnung der Lösungsgesamtheit (Gauß Algorithmus)*

Bei der Beantwortung der Fragestellungen sind ff. Begriffe zentral

**Definition 2.5.2.** *Es sei  $A \in K^{m \times n}$ . Dann heißt*

- (i)  $\text{Kern } A := \{x \in K^n | Ax = 0\} \subset K^n$  der Kern von  $A$
- (ii)  $\text{Im } A := \{b \in K^m | Ax = b \text{ ist lösbar}\} \subset K^m$  das Bild von  $A$

**Bemerkung:** *Definition 2.5.2 besagt also für  $A = (a_1, \dots, a_n) \in K^{m \times n}$*

- (i) Kern  $A$  ist die Lösung des homogenen Gleichungssystems  $Ax = 0$
- (ii)  $\text{Im } A = \{Ax | x \in K^m\} = \text{Lin}(a_1, \dots, a_n) \in K^m$  mit  $Ax = b$  ist lösbar  $\Leftrightarrow b \in \text{Im } A$

**Proposition 2.5.1.** Für  $A \in K^{m \times n}$  gilt:

- (i)  $\text{Im } A$  ist Unterraum von  $K^m$  mit  $\dim \text{Im } A = \text{Rang } A$
- (ii) Kern  $A$  ist Unterraum von  $K^n$

*Beweis.*

- (i) folgt aus der Bemerkung (ii) sowie Proposition 1.3.5 und Definition 2.3.1 und 2.3.2
- (ii) Kern  $A \subset K^n$  mit  $0 \in \text{Kern } A \Rightarrow \text{Kern } A \neq \emptyset$ ,  $A(x_1 + x_2) = \underset{=0}{Ax_1} + \underset{=0}{Ax_2} = 0$  und  $A(\alpha x_1) = \underset{=0}{\alpha Ax_1} = 0$

□

**Satz 2.5.1** (Dimensionsformel). Für jede Matrix  $A \in K^{m \times n}$  gilt:  
 $\dim(\text{Im } A) + \dim(\text{Kern } A) = n = \text{Anzahl von Spalten in } A$

*Beweis.* Es sei  $(y_1, \dots, y_k)$  eine Basis von Kern  $A$  und  $(b_1, \dots, b_r)$  eine Basis von  $\text{Im } A$  gemäß Korollar 1.4.3  $\Rightarrow k = \dim \text{Kern } A$  und  $r = \dim \text{Im } A = \text{Rang } A$

Z.z:  $k + r = n = \dim K^n \Rightarrow Ay_\nu = 0 \forall \nu = 1, \dots, k$  und  $y_1, \dots, y_k$  sind l.u. und  $\text{Lin}(y_1, \dots, y_k) = \text{Kern } A$  und  $\exists x_\nu \in K^n$  mit  $Ax_\nu = b_\nu \forall \nu = 1, \dots, r$  und  $b_1, \dots, b_r$  sind l.u. und  $\text{Lin}(b_1, \dots, b_r) = \text{Im } A$

Wir zeigen  $(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_k)$  bilden eine Basis des  $K^n$

- (i)  $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_k$  sind l.u.: Zum Beweis:  $\sum_{\nu=1}^r \alpha_\nu x_\nu + \sum_{\nu=1}^k \beta_\nu y_\nu = 0 \Rightarrow 0 = A0 = \sum_{\nu=1}^r \alpha_\nu \underset{=b_\nu}{Ax_\nu} + \sum_{\nu=1}^k \beta_\nu \underset{=0}{Ay_\nu} \Rightarrow \sum_{\nu=1}^r \alpha_\nu b_\nu = 0 \Rightarrow \alpha_\nu = 0 \forall \nu = 1, \dots, r \Rightarrow \sum_{\nu=1}^k \beta_\nu y_\nu = 0 \stackrel{\text{l.u.}}{\Rightarrow} \beta_\nu = 0 \forall \nu = 1, \dots, k$
- (ii)  $\text{Lin}(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_k) = K^n$ : Zum Beweis: Sei  $x \in K^n \Rightarrow Ax = b \in \text{Im } A \Rightarrow Ax = b = \sum_{\nu=1}^r \alpha_\nu b_\nu = \sum_{\nu=1}^r \alpha_\nu Ax_\nu = A \sum_{\nu=1}^r \alpha_\nu x_\nu \Rightarrow A(x - \sum_{\nu=1}^r \alpha_\nu x_\nu) = 0 \Rightarrow x - \sum_{\nu=1}^r \alpha_\nu x_\nu \in \text{Kern } A = \text{Lin}(y_1, \dots, y_k) \Rightarrow x \in \text{Lin}(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_k)$

□

**Beispiel:** Berechnung einer Basis von Kern

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \text{Rang } A = 2, \text{Kern } A = 5 - 2 = 3$

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\
2x_3 + x_4 + x_5 = 0
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
y_1 &= (-2, 1, 0, 0, 0)^T \\
y_2 &= \left(-\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0\right)^T \\
y_3 &= \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0\right)^T
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Kern } A = \{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\} = \{(-2\alpha_1 + \frac{5}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3, -\frac{1}{2}\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3, \alpha_2, \alpha_3) \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}\}$$

**Bemerkung:** Interpretation:

$k = \dim \text{Kern } A = \text{Anzahl der „freien Variablen“-Rang } A$

$r = \dim \text{Im } A = \text{Anzahl der linear unabhängigen Gleichungen}$

$n = \text{Anzahl der Unbekannten}$

**Satz 2.5.2** (Lösungsgesamtheit). Gegeben seien  $A \in K^{m \times n}, b \in K^m$  und  $Ax = b$  sei lösbar. Es sei  $x_0 \in K^n$  eine Lösung (d.h.  $Ax_0 = b$ ). Dann ist die Lösungsgesamtheit  $L(A, b) := \{x \in K^n \mid Ax = b\}$  des inhomogenen, linearen Gleichungssystem  $Ax = b$  gegeben durch  $L(A, b) = x_0 + \text{Kern } A := \{x_0 + x \mid x \in \text{Kern } A\}$ . Man nennt  $x_0$  auch eine partikuläre Lösung von  $Ax = b$ .

*Beweis.*

- (i) Es sei  $x \in L(A, b)$  d.h.  $Ax = b$  und  $b = Ax_0 \Rightarrow Ax - Ax_0 = A(x - x_0) = b - b = 0 \Rightarrow y := x - x_0 \in \text{Kern } A \Rightarrow x = y + x_0 \in x_0 + \text{Kern } A$
- (ii) Es sei  $x \in x_0 + \text{Kern } A \Rightarrow x = x_0 + y$  mit  $y \in \text{Kern } A \Rightarrow A(x_0 + y) = Ax_0 + Ay = b + 0 = b \Rightarrow x \in L(A, b)$

□

**Bemerkung:** Ist  $U$  ein Unterraum eines Vektorraums  $V$  der Dimension  $k$  und  $x_0 \in V$ , so nennt man  $x_0 + U := \{x_0 + x \mid x \in U\}$  eine  $k$ -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit in  $V$  auch einen affinen Unterraum von  $V$

**Beispiel:** Berechnung einer partikulären Lösung des inhomogenen, linearen Gleichungssystems  $Ax = b$  mit dem Gauß-Algorithmus [und Entscheidung der Lösbarkeit]

$A$  wie oben,  $b = (1, 2, -1, -2)^T \in \mathbb{R}^4$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 2 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Lösbar, weil  $\text{Rang } A = \text{Rang}(A|b)$

Setze  $x_2 = x_4 = x_5 = 0 \Rightarrow x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

**Satz 2.5.3** (Existenzsatz). Für eine Matrix  $A$ ,  $b \in K^m$  gilt  $Ax = b$  ist lösbar wenn  $\text{Rang } A = \text{Rang}(A|b)$ . Man nennt  $(A|b) \in K^{m \times (n+1)}$  die erweiterte Matrix

*Beweis.* Es sei  $A = (a_1, \dots, a_n) \in K^{m \times n}$ ,  $x = (x_\nu) \in K^n \Rightarrow Ax = \sum_{\nu=1}^n x_\nu a_\nu$ . Somit gilt  $Ax$  lösbar  $\Leftrightarrow b \in \text{Lin}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \dim \text{Lin}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \dim \text{Lin}(a_1, \dots, a_n, b) \Leftrightarrow \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b)$   $\square$

**Korollar 2.5.1.** Für  $A \in K^{m \times n}$  gilt:

- (i)  $Ax = 0$  besitzt nur die triviale Lösung  $x = 0 \Leftrightarrow \text{Rang } A = n$
- (ii)  $Ax = b$  ist für alle  $b \in K^m$  lösbar  $\Leftrightarrow \text{Rang } A = m$
- (iii)  $Ax = b$  besitzt für alle  $b \in K^m$  eine eindeutige Lösung  $\Leftrightarrow \text{Rang } A = m = n$  d.h.  $A$  ist regulär (siehe Satz 2.4.2)

*Beweis.*

- (i)  $Ax = 0$  nur für  $x = 0$  d.h.  $\text{Kern } A = \{0\} \Leftrightarrow \text{Rang } A + 0 = n$
- (ii)  $Ax = b$  ist lösbar  $\forall b \in K^m \Leftrightarrow \text{Im } A = K^m \Leftrightarrow \dim \text{Im } A = \dim K^m = \text{Rang } A$
- (iii)  $Ax = b$  ist eindeutig lösbar  $\forall b \in K^m \stackrel{\text{(ii)}}{\Leftrightarrow} \text{Rang } A = m \stackrel{\text{Satz 3.2}}{\Leftrightarrow} \text{Kern } A = \{0\} \Leftrightarrow \text{Rang } A = m = n$

$\square$

**Satz 2.5.4** (Fredholmsche Alternative). Für  $A \in K^{m \times n}$  und  $b \in K^m$  ist genau eines der folgenden Gleichungssysteme lösbar: (1)  $Ax = b$  (2)  $A^T y = 0$  und  $b^T y = 1$

**Bemerkung:** (2) ist unlösbar wenn  $b^T y = 0 \forall y \in \text{Kern } A^T$

*Beweis.*

- (i) Es sei (1) lösbar  $\Rightarrow \exists x \in K^n$  mit  $Ax = b \Rightarrow$  Nun sei  $y \in K^m$  mit  $A^T y = 0 \Rightarrow b^T y = (Ax)^T y = x^T (A^T y) = x^T 0 = 0 \Rightarrow$  (2) ist unlösbar
- (ii) Es sei (2) unlösbar  $b^T y = 0 \forall y \in \text{Kern } A^T$  d.h.  $\text{Kern } A^T = \text{Kern} \begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \text{Kern } A^T = m - \text{Rang } A^T = \dim \text{Kern} \begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} = m - \text{Rang} \begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } A = \text{Rang } A^T = \text{Rang} \begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} = \text{Rang}(A|b) \stackrel{\text{Satz 5.3}}{\Rightarrow} \text{(1) ist lösbar}$

□

**Proposition 2.5.2.** Für  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^n$  gilt:

(i)  $Ax = 0 \Leftrightarrow A^T Ax = 0$

(ii)  $\text{Kern } A = \text{Kern } A^T A$

(iii)  $\text{Rang } A = \text{Rang } A^T A$

*Beweis.*

(i)  $Ax = 0 \Rightarrow A^T(Ax) = 0$  Nun sei  $A^T Ax = 0$  und  $y = (y_\nu) := Ax \in \mathbb{R}^m$ .  $y^T y = \sum_{\nu=1}^m y_\nu^2 = (Ax)^T(Ax) = x^T(A^T Ax) = 0 \Rightarrow y = Ax = 0$  Damit gilt (i)

(ii) ist dasselbe wie (i)

(iii)  $\dim \text{Kern } A = n - \text{Rang } A = \dim \text{Kern } A^T A = n - \text{Rang } A^T A \Rightarrow \text{Rang } A = \text{Rang } A^T A$

□

**Satz 2.5.5** (Komplementarität). Für jede Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  gilt:

$$\text{Im } A \oplus \text{Kern } A^T = \mathbb{R}^m$$

*Beweis.* + ist direkt. Zum Beweis sei  $y \in \text{Im } A \cap \text{Kern } A^T \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n$  mit  $Ax = y$  und  $A^T y = 0 \Rightarrow 0 = A^T y = A^T(Ax) \stackrel{\text{Proposition 5.2}}{\Rightarrow} Ax = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \text{Im } A \cap \text{Kern } A^T = \{0\}$ . Nun gilt  $\dim(\text{Im } A \oplus \text{Kern } A^T) = \dim \text{Im } A + \dim \text{Kern } A^T - 0 = \text{Rang } A + m - \text{Rang } A^T = m \dim \mathbb{R}^m \rightarrow \text{Im } A \oplus \text{Kern } A^T = \mathbb{R}^m$

d.h.  $\text{Im } A$  und  $\text{Kern } A^T$  sind also Komplementärunterräume des  $\mathbb{R}^m$  gemäß Proposition 1.4.4 □

## 3 Lineare Abbildung

### 3.1 Der Begriff der linearen Abbildung

**Definition 3.1.1.** Es seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über demselben Körper  $K$

(i) Eine Abbildung  $F : V \rightarrow W$  heißt linear (auch ein Homomorphismus), falls gilt  $F(a + b) = F(a) + F(b), F(\alpha a) = \alpha F(a) \forall a, b \in V, \alpha \in K$

Wir schreiben dafür  $F \in L(V, W)$

Im Falle  $V = W$  nennt man  $F \in L(V, W)$  einen linearen Operator auf  $V$  (auch einen Endomorphismus)

Im Falle  $W = K$  nennt man  $F \in L(V, K)$  ein lineares Funktional

(ii) Eine lineare Abbildung, die bijektiv ist nennt man Isomorphismus

(iii) Die Vektorräume  $V$  und  $W$  heißen isomorph, kurz  $V \rightarrow W$  gibt.

**Bemerkung:**  $F : V \rightarrow W$  ist linear  $\Leftrightarrow F(\alpha a + \beta b) = \alpha F(a) + \beta F(b) \forall a, b \in V, \alpha, \beta \in K$

**Beispiel:**  $A \in K^{m \times n}$  und  $F(x) = Ax \in K^m$  für  $x \in K^n \Rightarrow F \in L(K^n, K^m)$  !

**Proposition 3.1.1.** Es seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $K$  und  $F \in L(V, W), G \in L(V, W)$  Dann gilt

$$(i) F(\sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu} a_{\nu}) = \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu} F(a_{\nu}) \forall a_1, \dots, a_n \in V, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$$

$$(ii) F(0) = 0$$

(iii)  $a_1, \dots, a_n \in V$  sind linear abhängig  $\Rightarrow F(a_1), \dots, F(a_n) \in W$  sind linear abhängig

(iv)  $F + G$  und  $\alpha F \in L(V, W)$  für  $\alpha \in K$ , also ist  $L(V, W)$  ein Vektorraum über  $K$

*Beweis.*

$$(i) F(\alpha a + \beta b) = \alpha F(a) + \beta F(b) \text{ Bem. } \Rightarrow (i) \text{ gilt mit Induktion nach } n$$

$$(ii) F(0) = F(0 \cdot 0) = 0 F(0) = 0$$

$$(iii) \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu} a_{\nu} = 0 (\exists \alpha_{\nu} \neq 0) \Rightarrow 0 = F(0) = F(\sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu} a_{\nu}) = \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu} F(a_{\nu}) \Rightarrow F(a_1), \dots, F(a_n) \text{ sind linear abhängig}$$

(iv) klar  $L(V, W)$  ist ein Unterraum des Funktionenraums  $\{f : V \rightarrow W\}$

□

Folgerung:  $F(a_1), \dots, F(a_n)$  sind l.u.  $\Rightarrow a_1, \dots, a_n$  sind l.u. ( $\Leftrightarrow$  (iii))

**Proposition 3.1.2.** Es seien  $U, V, W$  Vektorräume über  $K$  und  $F \in L(V, W)$  und  $G \in L(U, V)$ . Dann gilt:

$$(i) F \circ G \in L(U, W)$$

(ii)  $F \circ G$  ist ein Isomorphismus wenn  $F$  und  $G$  Isomorphismen sind

(iii)  $F^{-1}$  ist ein Isomorphismus wenn  $F$  ein Isomorphismus ist

*Beweis.*

$$(i) F \circ G : U \rightarrow W \text{ mit } (F \circ G)(\alpha a + \beta b) = F(\alpha G(a) + \beta G(b)) = \alpha F(G(a)) + \beta F(G(b)) = \alpha (F \circ G)(a) + \beta (F \circ G)(b) \forall a, b \in U, \alpha, \beta \in K$$

(ii) folgt aus (i) weil  $F \circ G$  bijektiv, wenn  $F, G$  bijektiv

$$(iii) F^{-1}(\alpha a + \beta b) = \alpha F^{-1}(a) + \beta F^{-1}(b) \Leftrightarrow \alpha a + \beta b = F(\alpha F^{-1}(a) + \beta F^{-1}(b)) = \alpha F(F^{-1}(a)) + \beta F(F^{-1}(b)) = \alpha a + \beta b \Rightarrow (iii)$$

□

**Satz 3.1.1** (Isomorphiesatz). *Zwei endlichdimensionale Vektorräume  $V$  und  $W$  über  $K$  sind genau dann isomorph, wenn gilt:  $\dim V = \dim W$*

*Beweis.*

- (i) Seien  $V \cong W$  d.h.  $\exists$  Isomorphismus  $F : V \rightarrow W \Rightarrow F \in L(V, W), F(V) = W \Rightarrow \dim W = \dim F(V) \leq \dim V$  und  $F^{-1} : W \rightarrow V$  ist ein Isomorphismus  $\dim V = \dim F^{-1}(W) \leq \dim W \Rightarrow \dim V = \dim W$
- (ii) Sei  $\dim V = \dim W = n < \infty \Rightarrow \exists$  Basen  $(a_1, \dots, a_n)$  und  $(b_1, \dots, b_n)$  von  $V$  und  $W$  (gemäß Korollar 1.4.3). Definiere eine Abbildung  $V \rightarrow W$  durch  $F(\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu a_\nu) = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu b_\nu \Rightarrow F$  ist linear und bijektiv, also ein Isomorphismus  $\Rightarrow V \cong W$

□

Folgerung: Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$  und  $n = \dim V < \infty$ . Dann ist  $V \cong K^n$

**Korollar 3.1.1.** *Es sei  $A \in K^{m \times n}, F(x) = Ax$  für  $x \in K^n$ . Dann ist  $F \in L(K^n, K^m)$  genau dann ein Isomorphismus wenn gilt  $n = m$  und  $A$  ist regulär.*

*Beweis.* Korollar 2.5.1 und Satz 3.1.1

□

## 3.2 Kern und Bild linearer Abbildungen

**Definition 3.2.1.** *Es seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $K$  und  $F \in L(V, W)$ . Dann heißt*

- (i)  $\text{Im } F := F(V) = \{b \in W \mid \exists x \in V \text{ mit } F(x) = b\}$  das Bild von  $F$   $\text{Rang } F = \dim \text{Im } F$  der Rang von  $F$  und
- (ii)  $\text{Kern } F := \{x \in V \mid F(x) = 0\}$  der Kern von  $F$

**Bemerkung:**  $A \in K^{m \times n}, F(x) = Ax$  für  $x \in K^n \Rightarrow \text{Im } F = \text{Im } A, \text{Rang } F = \text{Rang } A, \text{Kern } F = \text{Kern } A$

**Proposition 3.2.1.** *Es seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $K$  und  $F \in L(V, W)$ . Dann gilt*

- (i)  $\text{Im } F$  ist Unterraum von  $W$  mit  $\dim \text{Im } F \leq \dim V$
- (ii)  $\text{Kern } F$  ist ein Unterraum von  $V$

*Beweis.*

- (i)  $F(0) = 0 \Rightarrow 0 \in \text{Im } F \neq \emptyset$ , und es sei  $a, b \in \text{Im } F, \alpha \in K \Rightarrow \exists x, y \in V$  mit  $F(x) = a, F(y) = b \Rightarrow a + b = F(x) + F(y) \stackrel{F \text{ lin.}}{=} F(x + y) \in \text{Im } F$  und  $\alpha a = \alpha F(x) = F(\alpha x) = F(\alpha a) \in \text{Im } F \Rightarrow \text{Im } F$  ist ein Unterraum von  $W$
- (ii)  $F(0) = 0 \Rightarrow 0 \in \text{Kern } F \neq \emptyset$ , und es seien  $x, y \in \text{Kern } F, \alpha \in K \Rightarrow F(x + y) = F(x) + F(y) = 0 + 0 = 0$  und  $F(\alpha x) = \alpha F(x) = 0 \Rightarrow x + y, \alpha x \in \text{Kern } F$

□

**Satz 3.2.1** (Dimensionsformel). *Es seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $K$  mit  $n = \dim V < \infty$  und  $F \in L(V, W)$ . Dann gilt:*

$$\dim \operatorname{Im} F + \dim \operatorname{Kern} F = \dim V (= n)$$

*Beweis.* Es sei  $(y_1, \dots, y_k)$  eine Basis von  $\operatorname{Kern} F$  und  $(b_1, \dots, b_r)$  eine Basis von  $\operatorname{Im} F$  gemäß Korollar 1.4.3  $\Rightarrow k = \dim \operatorname{Kern} F$  und  $r = \dim \operatorname{Im} F$

Z.z:  $k + r = n = \dim K^n \Rightarrow F(y_\nu) = 0 \forall \nu = 1, \dots, k$  und  $y_1, \dots, y_k$  sind l.u. und  $\operatorname{Lin}(y_1, \dots, y_k) = \operatorname{Kern} F$  und  $\exists x_\nu \in K^n$  mit  $F(x_\nu) = b_\nu \forall \nu = 1, \dots, r$  und  $b_1, \dots, b_r$  sind l.u. und  $\operatorname{Lin}(b_1, \dots, b_r) = \operatorname{Im} F$

Wir zeigen  $(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_k)$  bilden eine Basis von  $V$

(i)  $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_k$  sind l.u.: Zum Beweis:  $\sum_{\nu=1}^r \alpha_\nu x_\nu + \sum_{\nu=1}^k \beta_\nu y_\nu = 0 \Rightarrow 0 = F(0) = \sum_{\nu=1}^r \alpha_\nu F(x_\nu) + \sum_{\nu=1}^k \beta_\nu F(y_\nu) \Rightarrow \sum_{\nu=1}^r \alpha_\nu b_\nu = 0 \Rightarrow \alpha_\nu = 0 \forall \nu = 1, \dots, r \Rightarrow \sum_{\nu=1}^k \beta_\nu y_\nu = 0 \stackrel{\text{l.u.}}{\Rightarrow} \beta_\nu = 0 \forall \nu = 1, \dots, k$

(ii)  $\operatorname{Lin}(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_k) = V$ : Zum Beweis: Sei  $x \in V \Rightarrow F(x) = b \in \operatorname{Im} F \Rightarrow F(x) = b = \sum_{\nu=1}^r \alpha_\nu b_\nu = \sum_{\nu=1}^r \alpha_\nu F(x_\nu) = F(\sum_{\nu=1}^r \alpha_\nu x_\nu) \Rightarrow F(x - \sum_{\nu=1}^r \alpha_\nu x_\nu) = 0 \Rightarrow x - \sum_{\nu=1}^r \alpha_\nu x_\nu \in \operatorname{Kern} F = \operatorname{Lin}(y_1, \dots, y_k) \Rightarrow x \in \operatorname{Lin}(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_k)$

□

**Beispiel** (Übungsaufgabe 11):  $V_n := \{p \mid p \text{ ist ein Polynome vom Grade } \leq n\}, n \in \mathbb{N}_0$  über  $\mathbb{R}$ .  $p(x) = \sum_{\nu=0}^n \alpha_\nu x^\nu$  für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ . Definiere  $F(p) := p'V_n \rightarrow V_n$  mit  $p'(x) = \sum_{\nu=0}^n \alpha_\nu \nu x^{\nu-1} \Rightarrow F \in L(V_n, V_n)$  mit  $\operatorname{Kern} F = \{ \text{konstante Funktionen} \} = V_0$  und  $\operatorname{Im} F = V_{n-1}$  und  $\dim V_n = n + 1 = \dim V_0 + \dim V_{n-1} = 1 + n$

### 3.3 Lineare Abbildungen und Matrizen

**Satz 3.3.1** (Matrixdarstellung linearer Abbildungen). *Es seien  $V$  und  $W$  endlich dimensionale Vektorräume über  $K$  mit den Basen  $B_1 = (a_1, \dots, a_n)$  von  $V (n = \dim V < \infty)$  und  $B_2 = (b_1, \dots, b_m) (m = \dim W < \infty)$ , und es sei  $F \in L(V, W)$ . Dann gibt es genau eine Matrix  $A \in K^{m \times n}$ , die sogenannte Matrixdarstellung  $A = A(F, B_1, B_2)$  von  $F$  bez.  $B_1$  und  $B_2$ , so daß gilt:*

$$F(\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu a_\nu) = \sum_{\nu=1}^m \beta_\nu b_\nu \text{ mit } \beta = A\alpha \quad \forall a = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu a_\nu, \alpha = (\alpha_\nu) \in K^n, \beta = (\beta_\nu) \in K^m$$

*Beweis.*  $F(a_\nu) = \sum_{\mu=1}^m a_{\mu\nu} b_\mu$  für  $\nu = 1, \dots, n$  mit eindeutigen Koeffizienten  $a_{\mu\nu} \in K \Rightarrow A : (a_{\mu\nu} \in K^{m \times n}$  ist eindeutig und für jeden Vektor  $a = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu a_\nu \in V$  gilt  $F(a) = F(\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu a_\nu) = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu F(a_\nu) = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu \sum_{\mu=1}^m a_{\mu\nu} b_\mu = \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu a_{\mu\nu} b_\mu = \sum_{\mu=1}^m \beta_\mu b_\mu$  mit  $\beta = A\alpha$  □

**Bemerkung:** Für einen linearen Operator  $F \in L(V, V)$  auf  $V$  und eine Basis  $B = (a_1, \dots, a_n)$  von  $V$  heißt  $A = A(F, B) \in K^{n \times n}$  die Matrixdarstellung von  $F$  gemäß Satz 3.1 mit  $W = V$  und  $B = B_1 = B_2$

**Satz 3.3.2** (Lineare Abbildungen und Matrixprodukte). Es seien  $A \in K^{m \times n}$ ,  $B \in K^{m \times k}$  und  $F(x) := Ax$  für  $x \in K^n$ ,  $G(x) := Bx$  für  $x \in K^k$ . Dann gilt  $F \in L(K^n, K^m)$ ,  $G \in L(K^k, K^m)$  und  $F \circ G \in L(K^k, K^m)$  mit  $(F \circ G)(x) = Cx$  für  $x \in K^k$  mit  $C = AB \in K^{m \times k}$

*Beweis.*  $F \in L(K^n, K^m)$  und  $G \in L(K^k, K^n)$  gemäß Beispielen, [Platzhalter]  $F \circ G = L(K^k, K^m)$  gemäß Proposition 3.1.2 und es gibt für  $x \in K^k$  :  $(F \circ G)(x) = F(G(x)) = F(Bx) = A(Bx) = (AB)x$ .  $\square$

## 4 Determinanten

### 4.1 Permutationen

**Definition 4.1.1.** Es sei  $n \in \mathbb{N}$

(i) eine bijektive Abbildung  $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  heißt eine Permutation (oder eine Umordnung) von  $\{1, 2, \dots, n\}$

(ii) Die Menge aller Permutationen von  $\{1, 2, \dots, n\}$  heißt die symmetrische Gruppe  $S_n$ . Schreibweise:  $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n$  und  $\text{id}$  bezeichnet die Identität auf  $S_n$ , d.h.  $\text{id}(\nu) = \nu$

**Satz 4.1.1.** Die symmetrische Gruppe  $S_n$  mit der Komposition  $\circ$  als Verknüpfung ist eine Gruppe. Diese Gruppe ist nicht abelsch für  $n \geq 3$ .

*Beweis.*  $S_n \neq \emptyset$ , und  $\circ$  ist innere Verknüpfung auf  $S_n$ , weil für  $\sigma, \tau \in S_n$  stets  $\sigma \circ \tau \in S_n$  ist [ $\sigma \circ \tau$  ist bijektiv wenn  $\sigma$  und  $\tau$  es sind]

(G1)  $(\sigma \circ \tau) \circ \rho = \sigma \circ (\tau \circ \rho) \quad \forall \sigma, \tau, \rho \in S_n$  dies gilt für Komposition von Abbildungen

(G2)  $\sigma \circ \text{id} = \rho \quad \forall \rho \in S_n$

(G3)  $\sigma \circ \sigma^{-1} = \text{id}$  wobei  $\sigma^{-1} \in S_n$  die Umkehrabbildung von  $\rho$  ist

$\rightarrow S_n$  ist eine Gruppe

Es sei  $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  mit  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_n \Rightarrow \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S_n$  ist nicht abelsch für  $n \geq 3$   $\square$

**Beispiele:**  $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \sigma \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, (\sigma \circ \tau)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \tau^{-1} \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, (\sigma^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

**Proposition 4.1.1.** Es sei  $n \in \mathbb{N}, \tau \in S_n$  (fest). Dann gilt:

$$(i) \sigma \circ \text{id} = \text{id} \circ \sigma, \sigma \circ \sigma^{-1} = \text{id}, \sigma = (\sigma^{-1})^{-1}, (\sigma \circ \tau)^{-1} = \tau^{-1} \circ \sigma^{-1}$$

(ii)  $\sigma \mapsto \sigma^{-1}, \sigma \mapsto \sigma \circ \tau, \sigma \mapsto \tau \circ \sigma$  für  $\sigma \in S_n$  sind bijektiv

(iii)  $S_n$  besitzt  $n!$  Elemente

*Beweis.*

(i) gilt gemäß Definition 1.1 bzw. Satz 1.1 und Satz 1.1.1

(ii) gilt gemäß Kapitel 1 Satz 1.1 und Satz 1.2

(iii) die Anzahl der Anordnungen von  $n$  Objekten  $= n(n-1)(n-2) \dots 1 = n!$  [Abzählbare Kombinatorik]

□

**Definition 4.1.2.** Es seien  $n \in \mathbb{N}, \sigma \in S_n$

(i) ein Paar  $(i, j)$  heißt Inversion (Fehlstellung) von  $\sigma$ , falls gilt  $1 \leq i < j \leq n$  und  $\sigma(i) > \sigma(j)$

(ii) Die Zahl  $\text{sign } \sigma := \begin{cases} 1 & \text{falls die Anzahl von Inversionen von } \sigma \text{ gerade ist} \\ -1 & \text{falls die Anzahl von Inversionen von } \sigma \text{ ungerade ist} \end{cases}$  heißt das Signum (oder Vorzeichen) der Permutation  $\sigma$

Fazit:  $\text{sign } \sigma = (-1)^{\text{Anzahl der Inversionen von } \sigma}$

**Beispiele:**  $\sigma = (2 \ 3 \ 4 \ 1)$  Inversionen:  $(1, 4), (2, 4), (3, 4) \Rightarrow \text{sign } \sigma = (-1)^3 = -1$

$\tau = (1 \ 3 \ 4 \ 2)$  Inversionen:  $(2, 4), (3, 4), (3, 4) \Rightarrow \text{sign } \tau = (-1)^2 = 1$

$\tau^{-1} = (1 \ 4 \ 2 \ 3) \Rightarrow \text{sign } \tau^{-1} = (-1)^2 = 1$

$\text{sign } \sigma^{-1} = (-1)^{-1}$

**Lemma.** Für jedes  $\sigma \in S_n$  gilt

$$(i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left| \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{j - i} \right| = 1$$

$$(ii) \text{sign } \sigma = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{j - i}$$

*Beweis.*

$$(i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)^2 = \prod_{i \neq j} (j - i) = \prod_{i \neq j} |\sigma(j) - \sigma(i)| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma(j) - \sigma(i))^2 \Rightarrow$$

(i) gilt

$$(ii) \text{ aus (i) folgt } \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = (-1)^{\text{Anzahl der Inversionen}} = \text{sign } \sigma$$

□

**Satz 4.1.2** (Verträglichkeit). Für  $\sigma$  und  $\tau$  aus  $S_n$  gilt  $\text{sign}(\sigma \circ \tau) = \text{sign } \sigma \cdot \text{sign } \tau$

*Beweis.*  $\text{sign}(\sigma \circ \tau) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{j - i} \cdot \frac{\tau(j) - \tau(i)}{\tau(j) - \tau(i)} = \prod_{1 \leq \tau(i) < \tau(j) \leq n} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} = \text{sign } \sigma \cdot \text{sign } \tau \quad \square$

**Korollar 4.1.1.** Für  $\sigma \in S_n$  gilt:  $\text{sign}(\sigma) = \text{sign}(\sigma^{-1})$

*Beweis.*  $\text{sign id} = 1 = \text{sign}(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \text{sign}(\sigma) \cdot \text{sign}(\sigma^{-1}) \Rightarrow \text{sign}(\sigma) = \text{sign}(\sigma^{-1}) \quad \square$

**Definition 4.1.3.** Eine Permutation  $\tau \in S_n$  heißt eine Transposition oder auch Vertauschung, falls  $\tau$  zwei Elemente von  $\{1, \dots, n\}$  vertauscht und die anderen unverändert lässt. Schreibweise:  $\tau = (24) \in S_4 = (1432)$  mit  $\text{sign } \tau = (-1)^3 = -1$

**Proposition 4.1.2.** Für Transpositionen  $\tau \in S_n$  gilt (i)  $\tau = \tau^{-1}$  (ii)  $\text{sign } \tau = -1$

Schreib

*Beweis.* (ii)  $\text{sign}(k(k+1)) = -1$  und induktiv folgt  $\text{sign}(k > (l+1)) = \text{sign}(k(k+1)) \circ \text{sign}((k+1)(l+1)) \circ (k(k+1)) = (-1)^3 \quad \square$

**Beispiel:**  $\sigma = (2341) = (2314) \circ (34) = (2134) \circ (23) \circ (34) = (12) \circ (23) \circ (34)$

**Proposition 4.1.3.** Für jede Permutation  $\sigma$  gibt es endlich viele ( $\leq n-1$ ) Transpositionen  $\tau_1, \dots, \tau_k \in S_n$  mit  $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_k$  und dann gilt  $\text{sign } \sigma = (-1)^k$

*Beweis.*  $\sigma = (\sigma(1) \dots, \sigma(n)) = \rho \circ (\sigma^{-1}(n)n)$  mit  $\rho(1), \dots, \rho(n-1) \in S_{n-1} \Rightarrow$  induktiv  $\exists \tau_1, \dots, \tau_{k-1}$  mit  $\rho = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_{k-1}$ , also  $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$  mit  $\tau_k = (\sigma^{-1}(n)n)$  [o.B.d.A  $\sigma^{-1}(n) \neq n$ ]  $\Rightarrow \text{sign } \sigma = (-1)^k$  mit Proposition 1.2 (ii) und Satz 1.2  $\square$

## 4.2 Der Begriff der Determinante

**Motivation:** Gegeben eine Quadratische Matrix  $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Berechne das Volumen des zugehörigen Parallelepiped  $\Pi := \{\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu a_\nu \mid 0 \leq \alpha_\nu \leq 1 \forall \nu\}$   
 $n=2$  Fläche( $\Pi$ ) =  $\det(a_1, a_2) = \text{Grundseite} \times \text{Höhe} = |a_1| \circ |a_2| \circ \sin \rho$

*Eigenschaften:*  $\det(\alpha a_1, a_2) = \alpha \det(a_1, a_2)$ ,  $\det(a_1, a_1 + a_2) = \det(a_1, a_2)$ ,  $\det(e_1, e_2) = 1$

**Satz 4.2.1** (Weierstraßsche Charakterisierung). Es sei  $K$  ein Körper und  $n \in \mathbb{N}$ . Es gibt genau eine Abbildung  $D : K^{n \times n} \rightarrow K$  mit den folgenden drei Eigenschaften:

$$(D1) \quad D(a_1, \dots, \alpha a_\nu, \dots, a_n) = \alpha D(A) \quad \forall \nu = 1, \dots, n$$

$$(D2) \quad D(a_1, \dots, a_\mu + a_\nu, \dots, a_n) = D(A) \quad \forall 1 \leq \nu \neq \mu \leq n$$

$$(D3) \quad D(I_{n \times n}) = 1$$

für alle  $A = (a_1, \dots, a_n) \in K^{n \times n}$ , und diese Abbildung ist gegeben durch

**Definition 4.2.1.** Es sei  $A = (a_{\mu\nu}) \in K^{n \times n}$  eine quadratische Matrix. Dann heißt  $(|A| =) \det A := \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \dots a_{n\sigma(n)}$  die Determinante von  $A$

**Lemma** (Rechenregeln). Für eine Abbildung  $D : K^{n \times n} \rightarrow K$  mit Eigenschaften (D1)-(D3) aus Satz 2.1 gelten folgende Rechenregeln/Eigenschaften:

- (D4)  $D(a_1, \dots, a_\nu + \alpha a_\mu, \dots, a_n) = D(A) \quad \forall \alpha \in K, 1 \leq \mu \neq \nu \leq n$  und allgemein:  
 $D(a_1, \dots, a_\nu + \sum_{\mu \neq \nu}^n \alpha_\mu a_\mu, \dots, a_n) = D(A)$
- (D5)  $D(a_1, \dots, a_n) = 0$  falls  $a_1, \dots, a_n$  linear abhängig und insbesondere falls  $a_\nu = 0$   
oder  $a_\nu = a_\mu$  für ein  $\mu \neq \nu$
- (D6)  $D(a_1, \dots, a_\mu, \dots, a_\nu, \dots, a_n) = -D(a_1, \dots, a_\nu, \dots, a_\mu, \dots, a_n) \quad \forall 1 \leq \mu < \nu \leq n,$   
allgemein  $D(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}) = \text{sign } \sigma D(A) \quad \forall \sigma \in S_n$
- (D7)  $D(a_1, \dots, a + a_\nu, \dots, a_n) = D(A) + D(a_1, \dots, a, \dots, a_n) \quad \forall 1 \leq \nu \leq n, a \in K^n,$   
allgemein  $D(a_1, \dots, \sum_{\mu=1}^n \alpha_\mu \tilde{a}_\mu, \dots, a_n) = \sum_{\mu=1}^n \alpha_\mu D(a_1, \dots, \tilde{a}_\mu, \dots, a_n)$
- (D8)  $D(A) = \det A \cdot D(I_{n \times n})$

*Beweis.*

- (D4) Es sei o.B.d.A  $\alpha \neq 0 \Rightarrow D(a_1, \dots, a_\mu, \dots, a_\nu, \dots, a_n) \stackrel{(D1)}{=} \frac{1}{\alpha} D(a_1, \dots, \alpha a_\mu, \dots, a_\nu, \dots, a_n) \stackrel{(D2)}{=} \frac{1}{\alpha} D(a_1, \dots, \alpha a_\mu, \dots, \alpha a_\mu + a_\nu, \dots, a_n) \stackrel{(D1)}{=} D(a_1, \dots, a_\mu, \dots, \alpha a_\mu + a_\nu, \dots, a_n) \Rightarrow$   
(D4) gilt
- (D5)  $a_1, \dots, a_n$  sind l.a.  $\Rightarrow \exists \nu \in \{1, \dots, n\}$  mit  $a_\nu = \sum_{\mu \neq \nu}^n \alpha_\mu a_\mu \Rightarrow D(a_1, \dots, a_n) \stackrel{(D4)}{=} D(a_1, \dots, a_\nu - \sum_{\mu \neq \nu}^n \alpha_\mu a_\mu, \dots) = D(\dots, 0 \cdot 0, \dots) = 0 D(\dots, 0, \dots) = 0 \Rightarrow$  (D5) gilt
- (D6)  $D(\dots, a_\mu, \dots, a_\nu, \dots) \stackrel{(D4)}{=} D(\dots, a_\mu, \dots, a_\nu - a_\mu, \dots) \stackrel{(D2)}{=} D(\dots, a_\mu + a_\nu - a_\mu, \dots, a_\nu - a_\mu, \dots) \stackrel{(D2)}{=} D(\dots, a_\nu, \dots, a_\nu - a_\mu, \dots) \stackrel{(D2)}{=} D(\dots, a_\nu, \dots, a_\nu - a_\mu - a_\nu, \dots) = -D(\dots, a_\nu, \dots, a_\mu, \dots) \Rightarrow$  Es gilt (D6)
- (D7) a)  $a_1, \dots, a_n$  sind l.u.  $\Rightarrow \text{Lin}(a_1, \dots, a_n) = K^n$  also  $a = \sum_{\mu=1}^n \alpha_\mu a_\mu \Rightarrow D(\dots, a_\nu + a, \dots) \stackrel{(D4)}{=} D(\dots, a_\nu + \alpha_\nu a_\nu, \dots) \stackrel{(D1)}{=} (1 + \alpha_\nu) D(A) = D(A) + \alpha_\nu D(A) \stackrel{(D1)}{=} D(A) + D(\dots, \alpha_\nu a_\nu, \dots) \stackrel{(D4)}{=} D(A) + D(\dots, \alpha_\nu a_\nu + \sum_{\mu \neq \nu}^n \alpha_\mu a_\mu, \dots) = D(A) + D(\dots, a, \dots)$
- b)  $a_1, \dots, a_n$  sind l.a.  $\Rightarrow D(A) = 0$
- i.  $a_1, \dots, a_{\nu-1}, a_{\nu+1}, \dots, a_n$  l.a.  $\Rightarrow D(A) = 0$  und  $D(\dots, a, \dots) = 0$
- ii.  $a_1, \dots, a_{\nu-1}, a_{\nu+1}, \dots, a_n$  l.u.  $\Rightarrow a_\nu = \sum_{\mu \neq \nu}^n \alpha_\mu a_\mu \Rightarrow D(\dots, a_\nu + a, \dots) = D(\dots, \sum_{\mu \neq \nu}^n \alpha_\mu a_\mu + a, \dots) = D(\dots, a, \dots) + D(A) \stackrel{=0}{=} D(\dots, a, \dots)$
- (D8)  $a_\nu = \sum_{\mu=1}^n a_{\mu\nu} e_\mu \quad \forall \nu = 1, \dots, n, D(A) = D(\sum_{\mu_1=1}^n a_{\mu_1 1} e_{\mu_1}, \dots, \sum_{\mu_n=1}^n a_{\mu_n n} e_{\mu_n}) = \sum_{\mu_1=1}^n a_{\mu_1 1} D(e_{\mu_1}, a_2, \dots, a_n) = \sum_{\mu_1=1}^n a_{\mu_1 1} \cdot \dots \cdot \sum_{\mu_n=1}^n a_{\mu_n n} D(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_n})$   
 $\left[ D(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_n}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (\mu_1, \dots, \mu_n) \notin S_n \text{ (D5)} \\ \text{sign } \sigma & \text{falls } (\mu_1, \dots, \mu_n) \in S_n \text{ (D6)} \end{cases} \right]$   
 $= \det A \cdot D(I)$

□

*Beweis von Satz 2.1:* (i) Die Abbildung  $D : K^{n \times n} \rightarrow K$  erfüllt (D1), (D2) und (D3)  
 $\Rightarrow$  Lemma (D8),  $D(A) = \det A \cdot (I) = \det A$

(ii)  $D(A) = \det A$  gemäß Definition 2.1

$$(D1) \det(\dots, \alpha a_\nu, \dots) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots \alpha a_{\sigma^{-1}(\nu)} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} = \alpha \det A$$

$$(D2) \det(\dots, a_\nu + a_\mu, \dots) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots (a_{\sigma^{-1}(\nu)\nu} + a_{\sigma^{-1}(\nu)\mu}) \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} =$$

$$\det A + \det(\dots, a_\mu, \dots, a_\mu, \dots) \text{ mit } \det(\dots, a_\mu, \dots, a_\mu, \dots) = \sum_{\sigma \circ (\mu\nu)} \text{sign } \sigma \cdots \stackrel{\text{sign}(\sigma \circ (\mu\nu)) = -\text{sign } \sigma}{=} -\det(\dots, a_\nu, \dots, a_\nu, \dots)$$

$$(D3) \det I = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma \delta_{1\sigma(1)} \cdots \delta_{n\sigma(n)} = \text{sign id} \cdot 1 = 1$$

□

**Bemerkung:** Die Rechenregel (D7) besagt: Für festes  $\nu \in \{1, \dots, n\}$  und feste Spalten  $a_1, \dots, a_{\nu-1}, a_{\nu+1}, \dots, a_n$  ist die Abbildung  $F(x) := \det(a_1, \dots, a_{\nu-1}, x, a_{\nu+1}, \dots, a_n)$ ,  $K^n \rightarrow K$  linear (also ein lineares Funktional). Für  $2 \times 2$ -Matrizen  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2) \in K^{2 \times 2}$  gilt  $\det(A + B) = \det(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = \det(a_1, a_2 + b_2) + \det(b_1, a_2 + b_2) = \det(a_1, a_2) + \det(a_1, b_2) + \det(b_1, a_2) + \det(b_1, b_2) = \det A + \det B + \det(a_1, b_2) + \det(b_1, a_2)$

**Beispiele:**  $A = (a_{\mu\nu}) \in K^{n \times n}$  Berechne  $\det A$  mit Definition 2.1 (Leibnizformel):

(i)  $n = 1$ :  $\det(a_{11}) = a_{11}$

(ii)  $n = 2$ :  $S_2 = \{(12), (21)\} \Rightarrow \det A = 1 \cdot a_{11}a_{22} + (-1)a_{12}a_{21}$

(iii)  $n = 3$ : [Platzhalter]

**Proposition 4.2.1.** Für jede Matrix  $A = (a_{\mu\nu}) \in K^{n \times n}$  gilt:

(i)  $\det(A) = \det(A^T)$

(ii)  $\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$ , falls  $A$  eine obere (oder untere) Dreiecksmatrix ist, d.h.  $a_{\mu\nu} = 0$  für  $\mu > \nu$

Folgerung: Wegen (i) gelten alle Rechenregeln auch für Zeilen statt für Spalten

*Beweis.*

(i)  $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \text{sign } \sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \text{sign } \sigma^{-1} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \text{sign } \sigma^{-1} a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} \stackrel{\text{Def}}{=} \det(A^T)$

(ii)  $\sigma \neq \text{id} \Leftrightarrow \exists \nu \in \{1, \dots, n\}$  mit  $n > \sigma(\nu) \Rightarrow \sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0 \Rightarrow \det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \text{sign id} a_{11} \cdots a_{nn} = \text{id} a_{11} \cdots a_{nn}$

□

**Bemerkung:** Berechnung von  $\det A$  mit dem Gauß-Algorithmus

Die Leibniz-Formel (Definition 2.1) enthält  $n!$ -Summanden/Produkte so daß die numerische Auswertung von  $\det A$  mittels dieser Formel (auch mit Computern) für „größere“  $n$  (etwa  $n \geq 30$ ) unmöglich ist. Aufgrund der Rechenregeln (D4) [für (Z1)] und (D6) [für (Z2)] und von Proposition 2.1 (ii) lässt sich die  $\det A$  effizient mit dem Gauß-Algorithmus berechnen

[Anzahl der Rechenoperationen(=Multiplikationen):  $\approx \sum_{k=1}^n k^2 \sim \frac{n^3}{3}$ ]

**Beispiele:**

$$(i) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(-)}]{\text{(Z2)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(-1) = 1$$

(ii) [Platzhalter]

**Satz 4.2.2** (Determinantenmultiplikationssatz). Für Matrizen  $A, B \in K^{n \times n}$  gilt:  
 $\det AB = \det A \cdot \det B$

*Beweis.* Es sei  $A$  eine fest vorgegebene Matrix. Wir betrachten die Abbildung  $D(B) := \det(AB) K^{n \times n} \rightarrow K$  für  $(b_1, \dots, b_n) \in K^{n \times n}$ . Wir zeigen  $D(\cdot)$  besitzt die Eigenschaften (D1) und (D2) von Satz 2.1

$$(D1) \quad D(b_1, \dots, \alpha b_\nu, \dots, b_n) = \det(Ab_1, \dots, A\alpha b_\nu, \dots, Ab_n) = \alpha D(B)$$

$$(D2) \quad D(\dots, b_\nu + b_\mu, \dots) = \det(Ab_1, \dots, A(b_\nu + b_\mu), \dots, Ab_n) \stackrel{(D2)}{=} D(B)_{Ab_\nu + Ab_\mu}$$

Mit Lemma und (D8) folgt  $D(B) = D(I) \cdot \det B = D(AI) \cdot \det B = \det A \cdot \det B$  □

**Satz 4.2.3** (Regularität, 2. Teil). Eine Matrix  $A \in K^{n \times n}$  ist genau dann regulär falls die  $\det A \neq 0$  ist und dann gilt  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

*Beweis.*

$$(i) \quad A \text{ ist regulär} \Rightarrow \exists A^{-1} \in K^{n \times n} \text{ mit } AA^{-1} = I \Rightarrow 1 = \det I = \det AA^{-1} = \det A \cdot \det A^{-1} \Rightarrow \det A \neq 0 \text{ und } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

$$(ii) \quad A \text{ sei nicht regulär} \Rightarrow \text{Rang } A < n, \text{ d.h. die Spalte von } A \text{ sind linear abhängig} \Rightarrow \det = 0$$

□

### 4.3 Entwicklungssätze

**Definition 4.3.1.** Für eine Matrix  $A = (a_{\mu\nu}) \in K^{n \times n}$  und  $\mu, \nu \in \{1, \dots, n\}$  heißt

$$\text{die Unterdeterminante } D_{\mu\nu} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(\nu-1)} & a_{1(\nu+1)} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{(\mu-1)1} & & & & & a_{(\mu-1)n} \\ a_{(\mu+1)1} & & & & & a_{(\mu+1)n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(\nu-1)} & a_{n(\nu+1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ ein}$$

Minor von  $A$  und  $A_{\mu\nu} = (-1)^{\mu+\nu} D_{\mu\nu}$  heißt das algebraische Komplement von  $a_{\mu\nu}$

**Beispiel:**  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\det A = 1$  und  $D_{11} = 2, D_{12} = -4, D_{13} = -7, D_{21} =$

$$1, D_{22} = -2, D_{23} = -4, D_{31} = 1, D_{32} = -1, D_{33} = -2, (A_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$(A^{-1})^T$$

**Lemma.** Für  $A = (a_1, \dots, a_n) \in K^{n \times n}$  und  $\mu, \nu \in \{1, \dots, n\}$  gilt  $A_{\mu\nu} = \det(a_1, \dots, a_{\nu-1}, e_\mu, a_{\nu+1}, \dots, a_n)$

*Beweis.*  $\det(a_1, \dots, a_{\nu-1}, e_\mu, a_{\nu+1}, \dots, a_n) \stackrel{(D4)}{=} (-1)^{\nu-1} \det(e_\mu, a_1, \dots, a_{\nu-1}, a_{\nu+1}, \dots, a_n) =$

$$(-1)^{\nu-1} (-1)^{\mu-1} \det \begin{pmatrix} 1 & a_{\mu 1} & \dots & a_{\mu(\nu-1)} & a_{\mu(\nu+1)} & \dots & a_{\mu n} \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1(\nu-1)} & a_{1(\nu+1)} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ a_{(\mu-1)1} & & & & & & a_{(\mu-1)n} \\ a_{(\mu+1)1} & & & & & & a_{(\mu+1)n} \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{n(\nu-1)} & a_{n(\nu+1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \stackrel{\text{Prop 3.1}}{=} (-1)^{\mu+\nu} D_{\mu\nu} =$$

$A_{\mu\nu}$  □

**Proposition 4.3.1.** Es seien  $1 \leq k < n, A \in K^{k \times k}, B \in K^{n-k \times n-k}, C \in K^{k \times n}$ . Dann

gilt für die sogenannte Blockmatrix  $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$

*Beweis.*  $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(\alpha_{\mu\nu}) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma \alpha_{1\sigma(1)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)} [\alpha_{1\sigma(1)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)} =$

0 falls  $\exists \nu > k$  mit  $\sigma(\nu) < k$ , sonst falls  $\sigma(\nu) \geq k \forall \nu \leq k$  d.h.  $\sigma = \rho \circ \tau$  mit  $\sigma \in S_n, \tau \in S_{n-k}] = \sum_{\rho \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-k}} \text{sign } \rho \text{sign } \tau a_{1\rho(1)} \cdots a_{k\rho(k)} b_{1\tau(1)} \cdots b_{n-k\tau(n-k)} = \det A \det B$  □

**Beispiele:**

$$(i) \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & -8 & 17 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = 14 * 9 = 126$$

$$(ii) \det \left( \begin{array}{ccc|cc} 4 & 11 & 0 & 7 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -5 & 6 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) = 2(-1)^{3+3} \det \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 11 & 7 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 0 \end{array} \right) = 2 \cdot (-3)(-1)^{1+4} \det \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & -4 \end{array} \right)$$

$$6 \cdot 35 = 210$$

**Satz 4.3.1** (Entwicklung nach Zeilen und Spalten). Für  $A \in K^{n \times n}$  gilt  $\det A = \sum_{\mu=1}^n a_{\mu\nu} A_{\mu\nu}$  für  $\nu = 1, \dots, n$  und  $\sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} A_{\mu\nu}$  für  $\mu = 1, \dots, n$  und allgemeiner gilt:  $\sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} A_{k\nu} = \delta_{k\mu} \det A \quad \forall \mu, k = 1, \dots, n$

*Beweis.*

- (i) Für  $\nu = k \in \{1, \dots, n\}$  ist  $a_\nu = \sum_{\mu=1}^n a_{\mu\nu} e_\mu$  und es folgt  $\det A = \det(a_1, \dots, \sum_{\mu=1}^n a_{\mu\nu} e_\mu, \dots, a_n) = \sum_{\mu=1}^n a_{\mu\nu} \det(a_1, \dots, e_\mu, \dots, a_n) \stackrel{\text{Lemma}}{=} \sum_{\mu=1}^n a_{\mu\nu} A_{\mu\nu} = \det A$
- (ii) Für  $\nu \neq k \in \{1, \dots, n\}$  gilt  $0 = \det(\dots, \sum_{\mu=1}^n a_{\mu\nu} e_\mu, \dots, a_\nu, \dots) = \sum_{\mu=1}^n a_{\mu\nu} \det(a_1, \dots, \nu, \dots, a_\nu, \dots, A_{\mu k})$

$$\Rightarrow \sum_{\mu=1}^n a_{\mu k} A_{\mu k} = \delta_{\nu k} \det A$$

Die andere Formel [Entwicklung nach Zeilen] folgt aus Proposition 1.1 (i) □

**Beispiel:**  $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 12 + 0 \cdot (-1)10 + (-1)(-22) = 35$

**Satz 4.3.2** (Cramersche Regel, 2. Teil). Es seien  $A \in K^{n \times n}$  regulär und  $b \in K^n$ . Dann gilt:

- (i)  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A_{\mu\nu})^T$  (Formel für inverse Matrix)
- (ii)  $Ax = b$  für  $x = (x_\nu) \in K^n$  mit  $x_\nu = \frac{\det(\dots, a_{\nu-1}, b, a_{\nu+1}, \dots)}{\det A}$  für  $\nu = 1, \dots, n$  (Cramersche Regel)

*Beweis.*

- (i)  $A$  regulär  $\stackrel{\text{Cram. Regel 1.}}{\Rightarrow} \det A \neq 0$  und mit Satz 3.1 folgt:  $I = (\delta_{\mu\nu}) = \frac{1}{\det A} \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} A_{k\nu} = \frac{1}{\det A} \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} (A_{\nu k})^T = A \left( \frac{1}{\det A} A_{\nu k} \right)^T$
- (ii)  $A$  regulär  $\Rightarrow Ax = b$  besitzt eine eindeutige Lösung, nämlich  $x_\nu = (A^{-1}b)_\nu = \frac{1}{\det A} \sum_{\mu=1}^n b_\mu A_{\mu\nu} = \frac{1}{\det A} \sum_{\mu=1}^n b_\mu \det(\dots, a_{\nu-1}, b, a_{\nu+1}, \dots) = \frac{1}{\det A} \det(\dots, b, \dots)$

□

**Bemerkung:**

(i) Es sei  $A \in K^{2 \times 2}$  regulär  $\Rightarrow = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

(ii) Allgemeiner Laplacescher Entwicklungssatz [siehe Niemeier-Wermuth p. 83 Satz 4.2.2]

**Beispiele:**

$$(i) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 13 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & -10 & 5 & -5 \\ 2 & -4 & 3 & -22 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 13 & 4 & 3 \\ -10 & 5 & -5 \\ -22 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(ii) Lösen des Gleichungssystems  $x + 2y + 4z = 1, y + 2z = 3, -x = 4$  mit Cra-

merscher Regel  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1, x = \frac{1}{-1} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -4, y =$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = 1, z = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

1

**Proposition 4.3.2.** Es sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  regulär und ganzzahlig d.h.  $a_{\mu\nu} \in \mathbb{Z} \forall \mu, \nu$ . Dann gilt  $A^{-1}$  ist ganzzahlig  $\Leftrightarrow \det A \in \{1, -1\}$

*Beweis.*

$$(i) A^{-1} \text{ ganzzahlig} \Rightarrow 1 = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} \Rightarrow \det A = 1 \text{ oder } -1$$

$$(ii) \text{ Sei } \det A \in \{-1, 1\} = A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A_{\mu\nu})^T \Rightarrow A^{-1} \text{ ganzzahlig}$$

□

**Proposition 4.3.3.** Es sei  $A \in K^{n \times n}$  mit  $r = \text{Rang } A \in \mathbb{N}$ . Dann besitzt  $A$  eine  $r \times r$ -Unterdeterminante die  $\neq 0$  ist und alle  $(r+1) \times (r+1)$ -Unterdeterminanten  $= 0$  oder  $r = \min\{m, n\}$ .

*Beweis.*

(i)  $A$  besitzt eine  $r \times r$ -Unterdeterminante  $\neq 0$ , o.B.d.A  $A = \begin{pmatrix} B & \cdots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$  mit  $\det B \neq 0$ . Die Spalten von  $B$  sind l.u.  $\Rightarrow$  dieselben verlängerten Spalten von  $A$  sind auch l.u.  $\Rightarrow \text{Rang } A \geq r$

(ii) Nun sei  $\text{Rang } \geq r \Rightarrow A$  besitzt mindestens  $r$  l.u. Spalten, o.B.d.A. die ersten  $r \Rightarrow \text{Rang}(a_1, \dots, a_r) = r \xrightarrow{\text{Rangsatz}} \Rightarrow$  Die Unterdeterminante  $(a_1, \dots, a_r)$  besitzt  $r$  l.u. Zeilen  $\Rightarrow \exists r \times r$  Unterdeterminante  $\neq 0$

□

## 5 Diagonalisierbarkeit

*Motivierendes Beispiel (Fibonacci Zahlen):* Diese Zahlen sind rekursiv definiert durch  $F(0) = 0, F(1) = 1, F(k+2) = F(k) + F(k+1)$ . Setze  $z_k := \begin{pmatrix} F(k) \\ F(k+1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ .

Dann gilt  $z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, z_{k+1} = \begin{pmatrix} F(k+1) \\ F(k+1) + F(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} z_k \Rightarrow z_k = A^k z_0$  für  $k = 0, 1, 2, \dots$  und den Matrixpotenzen  $A \cdot \dots \cdot A$  ( $A^0 := I$ )  
 $k$ .mal

→ *Problemstellung:* Berechne die Matrixpotenzen  $A^n$  einer gegebenen quadratischen Matrix

### 5.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

**Definition 5.1.1.** Es sei  $A \in K^{n \times n}$ . Eine Zahl  $\lambda \in K$  heißt ein Eigenwert von  $A$ , falls es einen Vektor  $x \in K^n$  gibt mit  $Ax = \lambda x$  und  $x \neq 0$ , und dann nennt man  $x$  einen Eigenvektor

**Satz 5.1.1** (Charakteristische Gleichung). Eine Zahl  $\lambda \in K$  ist genau dann ein Eigenwert der Matrix  $A \in K^{n \times n}$ , wenn gilt  $\det(A - \lambda I) = 0$

*Beweis.*  $Ax = \lambda x = \lambda Ix \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Kern}(A - \lambda I)$ ,  $\lambda$  ist ein Eigenwert von  $A \Leftrightarrow \text{Kern}(A - \lambda I) \neq \{0\} \stackrel{\text{Cramer, Reg. 1. Teil}}{\Leftrightarrow} A - \lambda I$  ist nicht regulär  $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \quad \square$

**Beispiele:**  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda I \Rightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618034\dots = \text{„Goldener Schnitt“}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$(A - \lambda_\nu I)s_\nu = 0 = \begin{pmatrix} -\lambda_\nu & 1 \\ 1 & 1 - \lambda_\nu \end{pmatrix} s_\nu$  für  $s_\nu = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\nu \end{pmatrix}, A(s_1, s_2) = A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$

$S := (s_1, s_2) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, S^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1}AS = D \Leftrightarrow A = SDS^{-1}$

$A^k = A \cdot \dots \cdot A = (SDS^{-1})(SDS^{-1}) \dots (SDS^{-1})(SDS^{-1}) = SD^k S^{-1}, D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \Rightarrow$

$z_k = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_1^k \\ \lambda_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(k) \\ F(k+1) \end{pmatrix} \Rightarrow F(k) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \right] \hat{=} \text{Formel von Binet}$

$F(k) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k, \frac{F(k+1)}{F(k)} \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Löse die Rekursion  $a_{n+3} = 9a_{n+2} - 26a_{n+1} + 24a_n$  für  $n \in \mathbb{N}_0, a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1 \Rightarrow a_3 = 9, a_4 = 55$

$$\Rightarrow z_k = \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k+1} \\ a_{k+2} \end{pmatrix} \Rightarrow z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ und } z_n = A^k z_0 \text{ f\u00fcr } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 24 & -26 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 24 & -26 & 9 - \lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)[- \lambda(9 - \lambda) + 26] + 24 = -\lambda^3 - 9\lambda^2 - 26\lambda + 24 = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4 \Rightarrow (A - \lambda_\nu)s_\nu = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 24 & -26 & 9 - \lambda \end{pmatrix} s_\nu = 0 \text{ mit } s_\nu = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\nu \\ \lambda_\nu^2 \\ \lambda_\nu^3 \end{pmatrix} \Rightarrow S := (s_1, s_2, s_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$z_k = SD^k S^{-1} z_0 = SD^k x \text{ mit } x = S^{-1} z_0 \text{ d.h. } Sx = z_0, D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & 16 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 12 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow a_k =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} 2^k - 3^k + \frac{1}{2} 4^k$$

**Definition 5.1.2.** F\u00fcr eine Matrix  $A \in K^{n \times n}$  hei\u00dft  $P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$ , das charakteristische Polynom von  $A$

**Proposition 5.1.1.** F\u00fcr  $A \in K^{n \times n}$  ist  $P_A(\lambda)$  ein Polynom vom Grade  $n$ , genauer gilt  $P_A(\lambda) = \sum_{\nu=0}^n \alpha_\nu \lambda^\nu = (-\lambda)^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \alpha_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_0$  mit  $a_\nu \in K \forall \nu = 0, \dots, n$  und  $a_n = (-1)^n \neq 0, a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) = (-1)^{n-1} \text{Spur } A$

*Beweis.*  $P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) + \dots + a_0$  (mit  $a_0 = \det A$ ) □

**\u00dcbung:** Es sei  $A \in K^{n \times n}$  und  $S \in K^{n \times n}$  regul\u00e4r. Dann gilt:  $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$  f\u00fcr  $B = S^{-1}AS$

**Bemerkung:** Es sei  $P$  ein Polynom ( $P \in K[x]$ ) und sei  $\lambda \in K$  mit  $P(\lambda) = 0$ . Dann folgt mit Polynomdivision:  $P(x) = (x - \lambda)Q(x)$  mit  $Q \in K[x]$ . Daher ist folgende algebraische Vielfachheit wohldefiniert.

**Definition 5.1.3.** Es sei  $A \in K^{n \times n}$

(i)  $\sigma(A) = \{ \text{Eigenwerte von } A \} \subset K$  hei\u00dft Spektrum von  $A$

(ii)  $\text{Eig}(A, \lambda) = \text{Kern}(A - \lambda I) := \{x \in K^n \mid Ax = \lambda x\}$  hei\u00dft Eigenraum von  $\lambda$  f\u00fcr  $\lambda \in K$

(iii)  $\rho(\lambda) = \dim \text{Eig}(A, \lambda)$  heißt die geometrische Vielfachheit von  $\lambda \in K$

(iv)  $n(\lambda)$  heißt die algebraische Vielfachheit von  $\lambda \in K$ , falls gilt  $P_A(x) = (x - \lambda)^{n(\lambda)}Q(x)$  mit  $Q \in K[x]$ , so daß  $Q(\lambda) \neq 0$

**Bemerkung:** Für  $A \in K^{n \times n}$  gilt also:

(i)  $A$  besitzt höchstens  $n$  Eigenwerte (gemäß obiger Bemerkung)

(ii)  $\lambda \in \sigma(A)$ , d.h.  $\lambda$  ist ein Eigenwert von  $A \Leftrightarrow \rho(\lambda) \geq 1 \Leftrightarrow n(\lambda) \leq 1$

(iii)  $\rho(\lambda) = n - \text{Rang}(A - \lambda I)$  für  $\lambda \in K$  gemäß Dimensionsformel (Kapitel II Satz 5.1)

(iv)  $\sum_{\lambda \in \sigma(A)} n(\lambda) \leq n$

(v)  $\rho(\lambda) = \text{Maximalanzahl von l.u. Vektoren zum Eigenwert } \lambda \text{ für } \lambda \in \sigma(A)$

**Proposition 5.1.2.** Für  $A \in K^{n \times n}$  und  $\lambda \in K$  gilt:  $\rho(\lambda) \leq n(\lambda)$

*Beweis.* Es sei  $r := \rho(\lambda)$  Zu zeigen  $P_A(x) = (x - \lambda)^r Q(x)$  mit  $Q \in K[x]$

$\Rightarrow \exists$  l.u. Vektoren  $s_1, \dots, s_r$  mit  $As_\nu = \lambda s_\nu \forall \nu = 1, \dots, r \xrightarrow{\text{Basiserg.}} \exists$  Basis  $(s_1, \dots, s_n)$  von  $K^n$ , d.h.  $S = (s_1, \dots, s_n)$  ist regulär  $\Rightarrow S^{-1}(AS) = S^{-1}(As_1, \dots, As_r) = S^{-1}(\lambda s_1, \dots, \lambda s_r, As_{r+1}, \dots, As_n)$

$\left( \begin{array}{c|c} \lambda I_{r \times r} & * \\ \hline 0 & C \end{array} \right) \Rightarrow P_A(x) = P_{S^{-1}AS}(x) = (\lambda - x)^r P_C(x)$

Folgerung:  $\sum \rho(\lambda) \leq n(\lambda) \leq n$  und  $\sum \rho(\lambda) = n \Rightarrow \rho(\lambda) = n(\lambda) \forall \lambda \in K$  □

**Proposition 5.1.3.** Für jede Matrix  $A \in K^{n \times n}$  sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von  $A$  l.u.

Folgerung:  $m := \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \rho(\lambda) =$  die Maximalanzahl linear unabhängiger Eigenvektoren von  $A$

*Beweis.* Es seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$  paarweise verschiedene Eigenwerte und  $s_1, \dots, s_m \in K^n$  mit  $As_\nu = \lambda_\nu s_\nu$ . Z.z.  $s_1, \dots, s_m$  sind l.u.

*Induktion nach  $m \in \mathbb{N}$ :*  $m = 1$  :  $s_1 \neq 0$ , weil  $s_1$  ein Eigenvektor ist.

$m \rightarrow m + 1$  :  $\sum_{\nu=1}^{m+1} \alpha_\nu s_\nu = 0 \Rightarrow 0 = A0 = \sum_{\nu=1}^{m+1} \alpha_\nu As_\nu = \sum_{\nu=1}^{m+1} \alpha_\nu \lambda_\nu s_\nu = \sum_{\nu=1}^{m+1} \alpha_\nu s_\nu \lambda_{m+1} \Rightarrow 0 = \sum_{\nu=1}^m \alpha_\nu (\lambda_\nu - \lambda_{m+1}) s_\nu \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ , da  $s_1, \dots, s_m$  nach  $\neq 0$

Induktionshypothese linear unabhängig sind  $\Rightarrow \alpha_{m+1} s_{m+1} = 0 \Rightarrow \alpha_{m+1} = 0$ , da  $s_{m+1}$  ein Eigenvektor ist. □

Eine Konsequenz von Proposition 1.3 ist das

**Korollar 5.1.1.** Die Matrix  $A \in K^{n \times n}$  besitzt  $n$  verschiedene Eigenwerte, dann besitzt  $A$   $n$  linear unabhängige Eigenvektoren:

*Beweis.*  $\sum \rho(\lambda) \geq n$  □

## 5.2 Diagonalisierbarkeit und Matrixpolynome

**Definition 5.2.1.** Eine Matrix  $A \in K^{n \times n}$  heißt diagonalisierbar, falls eine reguläre Matrix  $S \in K^{n \times n}$  und Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  existieren, so dass gilt:  $S^{-1}AS = D =$

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ ist eine Diagonalmatrix}$$

**Folgerung:**  $P_A(\lambda) = P_D(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$ , d.h.  $P_A$  zerfällt in Linearfaktoren, und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sind die Eigenwerte von  $A$  inklusive ihrer algebraischen Vielfachheiten

**Proposition 5.2.1.** Es seien  $A \in K^{n \times n}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  und  $S = (s_1, \dots, s_n) \in K^{n \times n}$  sei regulär. Dann gilt:  $S^{-1}AS = D = \text{diag}(\lambda_\nu)$  genau dann, wenn gilt:  $As_\nu = \lambda_\nu s_\nu$  für  $\nu = 1, \dots, n$ , d.h. die Spalten von  $s$  sind l.u. Eigenvektoren von  $A$  mit den entsprechenden Diagonalelementen  $\lambda_\nu$  von  $D$  als zugehörigen Eigenwerten.

*Beweis.*  $S^{-1}AS = D \Leftrightarrow AS = SD$  d.h.  $AS = A(s_1, \dots, s_n) = (As_1, \dots, As_n) = SD = (s_1, \dots, s_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 s_1, \lambda_2 s_2, \dots, \lambda_n s_n) \Leftrightarrow As_\nu = \lambda_\nu s_\nu \forall \nu = 1, \dots, n \quad \square$

**Korollar 5.2.1.** Eine Matrix  $A \in K^{n \times n}$  ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren besitzt.

**Folgerung:** Eine Matrix  $A \in K^{n \times n}$  mit  $n$  verschiedenen Eigenwerten ist stets diagonalisierbar

**Beispiele:**

(i) Jordan-Block:  $J = J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in K^{n \times n}, \lambda \in K \Rightarrow P_J(x) = (-1)^n(x - \lambda)^n$ , d.h.  $\sigma(J) = \{\lambda\}, n(\lambda) = n$  und  $\rho(\lambda) = \dim \text{Kern}(J - \lambda I) = \dim \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow J$  ist nicht diagonalisierbar für alle  $n \geq 2$

(ii)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 6 & 7 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & -2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(\lambda^2 - 9 + 7) - 1[(3 - \lambda)(-2) + 6] = -\lambda^3 \Rightarrow \sigma(A) = \{0\}, n(0) = 3, \rho(0) = 1$ , d.h.  $\exists$  nur 1 l.u. Eigenvektor  $\Rightarrow A$  ist nicht diagonalisierbar

$$(iii) A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -5 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = A^T$$

$$P_A(\lambda) = (7 - \lambda)[(7 - \lambda)(4 - \lambda) - 4] + 5[(-5)(4 - \lambda) - 4] - 2[(-5)(-2) + 2(7 - \lambda)] = (7 - \lambda)[\lambda^2 - 11\lambda + 24] + 5(5\lambda - 24) - 2[-2\lambda + 24] = -\lambda^3(7 - 11)\lambda^2 + (-77 - 24 + 25 + 4)\lambda = (-\lambda)(\lambda^2 - 18\lambda + 72) = -\lambda(\lambda - 6)(\lambda - 12) \Rightarrow \text{Eigenwerte: } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 12 \Rightarrow A \text{ ist diagonalisierbar}$$

$$(A - \lambda_1 I)s_1 = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -5 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} s_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 I)s_2 = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ -5 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_3 I)s_3 = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -2 \\ -5 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix} s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } s_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \text{ für } S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

**Satz 5.2.1** (Matrixpotenzen). *Es seien  $A \in K^{n \times n}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  und es sei  $S \in K^{n \times n}$  regulär, so dass gilt:  $S^{-1}AS = D = \text{diag}(\lambda_\nu)$*

*Dan gilt:  $A^r = S \cdot \text{diag}((\lambda_\nu)^r)S^{-1} \quad \forall r \in \mathbb{N}_0$  (wobei  $A^0 := I$ )*

*Beweis.*  $S^{-1}AS = D \Rightarrow A = SDS^{-1}$  und es gilt:  $D^r = \text{diag}(\lambda_1^r, \dots, \lambda_n^r) \Rightarrow A^r = (SDS^{-1})(SDS^{-1}) \dots (SDS^{-1}) = SD^rS^{-1} \quad \square$

**Beispiel:**  $A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -5 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma(A) = \{0, 6, 12\}$ ,  $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ , (Gauß-

Algorithmus)  $\Rightarrow S^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6^r & 0 \\ 0 & 0 & 12^r \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6^r & 0 \\ -3 \cdot 12^r & 3 \cdot 12^r & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6^r + 3 \cdot 12^r & 6 - 3 \cdot 12^r & -2 \cdot 6^r \\ 6^r - 3 \cdot 12^r & 6 + 3 \cdot 12^r & -2 \cdot 6^r \\ -2 \cdot 6^r & -2 \cdot 6^r & 4 \cdot 6^r \end{pmatrix}$$

**Definition 5.2.2.** *Für ein Polynom  $Q(x) = \sum_{\nu=0}^l a_\nu x^\nu \in K[x]$  und eine Matrix  $A \in K^{n \times n}$  ist das Matrixpolynom  $Q(A)$  definiert durch:  $Q(A) = \sum_{\nu=0}^l a_\nu A^\nu \in K^{n \times n}$*

**Korollar 5.2.2.** Es seien  $Q \in K[x]$  ein Polynom,  $A \in K^{n \times n}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  und es sei  $S \in K^{n \times n}$  regulär, so dass gilt:  $S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_\nu)$ . Dann gilt:  $Q(A) = S \cdot \text{diag}(Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)) \cdot S^{-1}$

*Beweis.*  $Q(A) = \sum_{\mu=0}^l a_\mu A^\mu \stackrel{\text{Satz 2.1}}{=} \sum_{\mu=0}^l a_\mu S \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\mu \cdot S^{-1} = S \cdot \text{diag}(\sum_{\mu=0}^l a_\mu \lambda_\nu^\mu) \cdot S^{-1}$  □

**Folgerung:**  $Q(A)$  besitzt (inkl. algebraischer Vielfachheiten) die Eigenwerte  $Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)$

**Satz 5.2.2** (Hamilton-Cayley). Es sei  $A \in K^{n \times n}$  mit charakteristischem Polynom  $P_A(x) = \sum_{\mu=0}^n \alpha_\mu x^\mu = \det(A - xI)$ .  
Dann gilt:  $P_A(A) = 0 = \sum_{\mu=0}^n \alpha_\mu A^\mu \in K^{n \times n}$

*Beweis.* Gemäß der Formel für die inverse Matrix [Cramersche Regel 2. Teil, Kapitel 4 Satz 3.2] gilt für  $x \notin \sigma(A)$ :  $(A - xI)^{-1}P_A(x) = \sum_{\mu=0}^{n-1} x^\mu B_\mu$  mit gewissen Matrizen  $B_\mu \in K^{n \times n} \Rightarrow IP_A(x) = \sum_{\mu=0}^n \alpha_\mu x^\mu I = (A - xI) \sum_{\mu=0}^{n-1} B_\mu x^\mu \Rightarrow$  Koeffizientenvergleich

$$\left. \begin{array}{l} A^n \\ A^{n-1} \\ \vdots \\ A^1 \\ I \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha_n I = -B_{n-1} \\ \alpha_{n-1} I = AB_{n-1} - B_{n-2} \\ \vdots = \vdots \\ \alpha_1 I = AB_1 - B_0 \\ \alpha_0 I = AB_0 \end{array} \left. \right\} P_A(A) = \sum_{\mu=0}^n \alpha_\mu A^\mu = (-A^n B_{n-1}) + (A^n B_{n-1} - A^{n-1} B_{n-2} + \dots + (A^2 B_1 - AB_0) + (AB_0) = 0 \in K^{n \times n} \quad \square$$

**Beispiel:**  $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Beachte  $P_A(x) = -x^3 \stackrel{\text{Ham.} \rightarrow \text{Caley}}{\Rightarrow} -A^3 = 0$

**Definition 5.2.3.** Das Minimalpolynom  $m_A(x) = \sum_{\mu=0}^m \beta_\mu x^\mu \in K[x]$  einer Matrix  $A \in K^{n \times n}$  ist das normierter Polynom  $P \in K[x]$  kleinsten Grades mit  $P(A) = 0$ , d.h. es gilt  $\beta_m = 1, m_A(A) = 0$ , und für alle Polynome  $P(x) \in K[x] \setminus \{0\}$  mit  $P(A) = 0$  und  $\text{Grad}P \geq \text{Grad}m_A$

**Bemerkung:**

- (i) Es gilt  $1 \geq m \geq n$  (nach Caley-Hamilton)
- (ii) Polynomdivision mit Rest: Für  $P(x) \in K[x]$  und  $Q(x) \in K[x] \setminus \{0\}$  gibt es (eindeutig bestimmte) Polynome  $q(x), r(x) \in K[x]$ , so daß gilt  
 $P(x) = q(x)Q(x) + r(x)$  mit  $\text{Grad}r(x) < \text{Grad}Q(x)$   
Man sagt  $Q(x)$  teilt  $P(x)$ ,  $Q(x)|P(x)$  falls  $r(x) = 0$ , dann gilt  $\frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) \in K[x]$
- (iii) Wir sagen: Ein Polynom  $Q(x) = \sum_{\mu=0}^l a_\mu x^\mu \in K[x], a_l \neq 0$  zerfällt in Linearfaktoren, falls  $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in K$  existieren so dass gilt  $Q(x) = a_l(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_l)$ , und dann gilt offenbar  $Q(A) = a_l(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_l I)$  für  $A \in K^{n \times n}$

(iv) Im Folgenden ist stets  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subset K$  das Spektrum der Matrix  $A \in K^{n \times n}$  mit den paarweise verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  von  $A$

**Proposition 5.2.2.** *Es sei  $A \in K^{n \times n}$  mit Spektrum  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subset K$  und  $Q(x) \in K[x]$  ein Polynom mit  $Q(A) = 0$ . Dann gilt  $Q(\lambda) = 0 \forall \lambda \in \sigma(A)$  und somit  $(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k) | Q(x)$*

*Beweis.* Es sei  $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \exists s \in K^n \setminus \{0\}$  mit  $As = \lambda s \Rightarrow$  Für  $\mu \in \mathbb{N}_0$  gilt  $A^\mu s = \lambda^\mu s \Rightarrow 0 = Q(A)s = \sum_{\mu=0}^l a_\mu A^\mu s = \sum_{\mu=0}^l a_\mu \lambda^\mu s = Q(\lambda)s = 0 \Rightarrow Q(\lambda) = 0$ , da  $s \neq 0$   $\square$

**Folgerung:**  $k \leq m \leq n$  und  $k|m$  und  $m|n$  nach Proposition 2.3

**Beispiel:**  $A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -5 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$  mit  $\sigma = \{0, 6, 12\} \Rightarrow m_A(A) = x(x - 6)(x - 12) = -P_A(x)$

**Proposition 5.2.3.** *Seien  $A \in K^{n \times n}$  mit Spektrum  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subset K$  und  $Q(x) = \sum_{\mu=0}^l a_\mu x^\mu$  sowie  $\lambda \in K$ . Dann gilt:*

- (i)  $Q(A) = 0 \Rightarrow m_A(x) | Q(x)$  d.h.  $\exists g \in K[x]$  mit  $Q(x) = m_A(x) \cdot g(x)$
- (ii)  $m_A(x)$  ist eindeutig
- (iii)  $m_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(A)$
- (iv)  $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_l) | m_A(x)$  und  $m_A | P_A(x)$

*Beweis.*

- (i) Gemäß Division mit Rest  $\exists q(x), r(x) \in K[x]$  mit  $Q(x) = q(x) \cdot m_A(x) + r(x)$  mit  $\text{Grad} r(x) < \text{Grad} m_A(x) \Rightarrow r(A) = Q(A) - q(A)m_A(A) = 0 \Rightarrow r(A) = 0 \Rightarrow r = 0$
- (ii)  $m(x)$  und  $\tilde{m}(x)$  erfüllen Definition 2.3  $\Rightarrow m(A) = \tilde{m}(A)$  und  $\text{Grad} m = \tilde{m}$  und  $m, \tilde{m}$  sind normalisiert  $\text{Grad}(m - \tilde{m}) < \text{Grad} m(x)$  und  $m(A) - \tilde{m}(A) = 0 \Rightarrow (m - \tilde{m}) = 0$
- (iii)  $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow m_A(\lambda) = 0 \Rightarrow m_A(x) = (x - \lambda)q(x)$  mit  $q(x) \in K[x]$  und  $\text{Grad}(q(x)) = \text{Grad}(m_A(x)) - 1, 0 = m_A(A) = (A - \lambda I)q(A) \Rightarrow q(A) \neq 0$  (da  $\text{Grad} q < \text{Grad} m_A$ )  $\Rightarrow (A - \lambda I)$  nicht regulär  $\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda \in \sigma(A)$
- (iv)  $(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k) | m_A(x)$  gemäß Proposition 2.2, weil  $m_A(A) = 0$  und  $m_A(x) | P_A(x)$  gemäß (i), weil  $P_A(A) = 0$  nach Caley-Hamilton

$\square$

**Satz 5.2.3** (Diagonalisierbarkeit). *Es sei  $A \in K^{n \times n}$  mit Spektrum  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subset K$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (i)  $A$  ist diagonalisierbar

(ii)  $A$  besitzt  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren

(iii)  $P_A(x)$  zerfällt in Linearfaktoren und es gilt  $\rho(\lambda) = n(A) \forall \lambda \in K$

(iv)  $m_A(x)$  zerfällt in Linearfaktoren und besitzt nur einfache Nullstellen  $m_A(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k)$

*Beweis.*

(i) (i)  $\Leftrightarrow$  (ii): gemäß Korollar 2.1

(ii) (i)  $\Rightarrow$  (iii):  $A$  diagonalisierbar  $\Rightarrow \sum_{\lambda \in \sigma} \rho(\lambda) = n \Rightarrow \sum n(\lambda) = n \Rightarrow P_A(x)$  zerfällt in Linearfaktoren.

(iii)  $\Rightarrow$  (i): Es gelte (iii)  $\Rightarrow \sum n(\lambda) = n$  und  $\rho(\lambda) = n(\lambda) \Rightarrow \sum \rho(\lambda) = n \Rightarrow$  (ii)

(iii) (ii)  $\Rightarrow$  (iv): Es sei  $S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  und  $P(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k) \Rightarrow \{\lambda_\nu | \nu = 1, \dots, n\} = \sigma(A) \Rightarrow P(\lambda_\nu) = 0 \Rightarrow P(A) = S \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) S^{-1} = 0 \Rightarrow m_A(x) = P(A)$

(iv)  $\Rightarrow$  (ii): Sei  $m_A(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k) \Rightarrow 0 = m_A(A) = (A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_k I) =: A_k$

Z.z.  $\text{Eig}(A, \lambda_1) + \dots + \text{Eig}(A, \lambda_k) = K^n = \text{Kern } A_k$

Wir zeigen induktiv  $\text{Kern } A_\nu \subset \text{Eig}(A, \lambda_1) + \dots + \text{Eig}(A, \lambda_\nu)$  für  $\nu = 1, \dots, k$  wobei  $A_\nu = (A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_\nu I)$

$\nu = 1$  :  $x \in \text{Kern } A_1, 0 = A_1 x = (A - \lambda_1 I)x \Leftrightarrow Ax = \lambda_1 x \Leftrightarrow x \in \text{Eig}(A, \lambda_1)$

$\nu \rightarrow \nu + 1$  :  $x \in \text{Kern}(A_{\nu+1}) \Rightarrow 0 = A_{\nu+1} x = A_\nu (A - \lambda_{\nu+1} I)x \Rightarrow (A - \lambda_{\nu+1} I)x \in \text{Kern } A_\nu \xrightarrow{\text{Ind. Hyp}} \exists x_\mu \in \text{Eig}(A, \lambda_\mu)$ , d.h.  $Ax_\mu = \lambda_\mu x_\mu \forall \mu = 1, \dots, \nu$  mit  $(A - \lambda_{\nu+1} I)x = \sum_{\mu=1}^{\nu} x_\mu$

Betrachte  $y = x + \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\mu} x_\mu$  [Beachte  $\lambda_\mu - \lambda_{\nu+1} \neq 0 \forall \mu = 1, \dots, \nu$ , da sie paarweise verschieden sind]

$Ay = Ax + \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\mu} Ax_\mu = \lambda_{\nu+1} x + \sum_{\mu=1}^{\nu} x_\mu + \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\mu} \lambda_\mu x_\mu$   
 $= \lambda_{\nu+1} \left( x + \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\mu} x_\mu \right) = \lambda_{\nu+1} y \Rightarrow y = x + \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\mu} x_\mu \in \text{Eig}(A, \lambda_{\nu+1}) \Rightarrow$   
 $x = y - \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\mu} x_\mu \in \text{Eig}(A, \lambda_1) + \dots + \text{Eig}(A, \lambda_\nu) + \text{Eig}(A, \lambda_{\nu+1}) \Rightarrow$  Induktionsbehauptung

□

**Beispiele:**

(i)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A(x) = (1-x)[(3-x)(-3+x)+8] = -(x-1)^2(x+1).$

$$\text{Sei } P(x) := (x-1)(x+1) \text{ mit } P(A) = (A-I)(A+I) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A \text{ ist diagonalisierbar.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P_A(x) = -(x-1)^2(x-2), \sigma(A) = \{1, 2\}$$

$$(A-I)(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & & \\ & & \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow A \text{ ist nicht}$$

diagonalisierbar  $\Rightarrow m_A = (x-1)^2(x-2)$

### 5.3 Ähnlichkeit und Basiswechsel

**Bemerkung:** Matrixdarstellung linearer Operatoren [Kapitel 3.3, Satz 3.3.1] Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$  mit  $\dim V = n < \infty$  und Basis  $B = (a_1, \dots, a_n)$  sowie  $F$  ein linearer Operator, also  $F \in L(V, V)$ . Dann gibt es genau eine quadratische Matrix  $A \in K^{n \times n}$  [Matrixdarstellung bzgl.  $B = B_1 = B_2$ ] mit  $F(\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu a_\nu) = \sum_{\nu=1}^n \beta_\nu a_\nu$  mit  $\beta = A\alpha$ .

**Satz 5.3.1** (Basiswechsel). Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$  mit  $\dim V = n < \infty$  mit Basen  $B = (a_1, \dots, a_n)$  und  $\tilde{B} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)$  und es sei  $F \in L(V, V)$  ein linearer Operator mit der Matrixdarstellung  $A$  und  $\tilde{A} \in K^{n \times n}$ . Dann gilt  $\tilde{A} = S^{-1}AS$  für eine reguläre Matrix  $S \in K^{n \times n}$

*Beweis.*  $a_1, \dots, a_n$  ist eine Basis von  $V \Rightarrow \tilde{a}_\nu = \sum_{\mu=1}^n s_{\mu\nu} a_\mu \forall \nu = 1, \dots, n$  mit einer Matrix  $S = (s_{\mu\nu})$ .  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$  sind linear unabhängig  $\Rightarrow S$  ist regulär.

$$\text{Für } x \in K^n \text{ gilt } x = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu a_\nu = \sum_{\nu=1}^n \tilde{\alpha}_\nu \tilde{a}_\nu = \sum_{\nu=1}^n \tilde{\alpha}_\nu \sum_{\mu=1}^n s_{\mu\nu} a_\mu = \sum_{\mu=1}^n (\sum_{\nu=1}^n s_{\mu\nu} \tilde{\alpha}_\nu) a_\mu = \sum_{\mu=1}^n (S\tilde{\alpha})_\mu a_\mu \Rightarrow \alpha = S\tilde{\alpha} \Leftrightarrow \tilde{\alpha} = S^{-1}\alpha$$

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^n \beta_\nu a_\nu = \sum_{\nu=1}^n \tilde{\beta}_\nu \tilde{a}_\nu \text{ mit } \beta = A\alpha \text{ und } \tilde{\beta} = \tilde{A}\tilde{\alpha} \Rightarrow \text{und es gilt } \beta = S\tilde{\beta}$$

$$(S^{-1}AS)\tilde{\alpha} = S^{-1}A\alpha = S^{-1}\beta = \tilde{\beta} = \tilde{A}\tilde{\alpha} \forall \alpha, \tilde{\alpha} \in K^n \Rightarrow \tilde{A} = S^{-1}AS \quad \square$$

**Proposition 5.3.1.** Ähnliche Matrizen besitzen dasselbe charakteristische Polynom, also insbesondere dieselben Eigenwerte

### 5.4 Der Fundamentalsatz der Algebra und komplexe Matrizen

**Satz 5.4.1** (Fundamentalsatz der Algebra, Gauß 1797). Jedes Polynom  $P(x) = \sum_{\nu=1}^n a_\nu x^\nu \in \mathbb{C}[x]$  vom Grade  $n \in \mathbb{N}$  besitzt genau  $n$  Nullstellen in  $\mathbb{C}$  (inclusive Vielfachheiten).

*Beweis.* siehe Funktionentheorie □

**Korollar 5.4.1.** Jede komplexe Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  besitzt mindestens einen Eigenwert

**Korollar 5.4.2.** Jedes Polynom  $P \in \mathbb{C}[x]$  zerfällt in Linearfaktoren.

**Proposition 5.4.1.** Es sei  $A$  eine komplexe Matrix mit charakteristischem Polynom  $P_A(x) = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu x^\nu$  und Spektrum  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subset \mathbb{C}$ . Dann existieren  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$  so daß gilt  $P_A(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_k)^{n_k} = (-1)^n (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$  mit  $n_\nu = n(\lambda_\nu)$  für  $\nu = 1, \dots, k$ ,  $\sum_{\lambda \in \sigma(A)} n(\lambda) = n$ , sowie  $\alpha_n = (-1)^n$ ,  $\alpha_0 = \det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_n$ ,  $(-1)^{n-1} \alpha_{n-1} = \text{Spur} A = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu$

*Beweis.* Satz 4.1, Korollar 4.1 und Proposition 1.1 □

**Bemerkung:** Berechnung der Nullstellen eines Polynoms  $P(x) \in \mathbb{C}[x]$  vom Grade  $n$  mittels einer Formel:  $n = 1$ : klar,  $n = 2$ : Mitternachtsformel,  $n = 3$ : Cardano 1545,  $n = 4$ : Ferrari 1545,  $n \geq 5$  Es gibt keine allgemeine Formel (Nils Abel, 1824, Galoistheorie)

## 6 Euklidische und unitäre Vektorräume

### 6.1 Der Begriff des Skalarprodukts

**Definition 6.1.1.** Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$ . Eine Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow K$  heißt ein Skalarprodukt in  $V$ , wenn folgende Eigenschaften (Axiome) für alle  $a, b, c \in V$  und alle Skalare  $\alpha \in K$  gelten:

$$(S1) \quad \langle a, b + c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle \quad (\text{Additivität})$$

$$(S2) \quad \langle a, \alpha b \rangle = \alpha \langle a, b \rangle \quad (\text{Homogenität})$$

$$(S3) \quad \langle a, b \rangle = \overline{\langle b, a \rangle} \quad (\text{Symmetrie})$$

$$(S4) \quad \langle a, a \rangle \geq 0 \text{ und } = 0 \text{ genau dann wenn } a = 0$$

Ein Vektorraum mit Skalarprodukt heißt ein Euklidischer Vektorraum, falls  $K = \mathbb{R}$ , und ein Unitärer Vektorraum, falls  $K = \mathbb{C}$  (euklidischer/unitärer Raum)

**Beispiele:** kanonische Skalarprodukte

$$(i) \quad V = \mathbb{R}^n, K = \mathbb{R} \text{ und } \langle a, b \rangle = a^T b, \langle a, a \rangle = \sum_{\nu=1}^n a_\nu^2 \geq 0$$

$$(ii) \quad V = \mathbb{C}^n, K = \mathbb{C} \text{ und } \langle a, b \rangle = \bar{a}^T b, \langle a, a \rangle = \sum_{\nu=1}^n |a_\nu|^2 \geq 0$$

$$(iii) \quad V = C[a, b], K = \mathbb{R} \text{ und } \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

**Proposition 6.1.1.** In einem euklidischen oder unitären Raum  $V$  über  $K$  gilt für alle  $a, b, c, a_\nu \in V$  und  $\alpha, \alpha_\nu \in K$

$$(i) \quad \langle b + c, a \rangle = \langle b, a \rangle + \langle c, a \rangle$$

$$(ii) \quad \langle \alpha a, b \rangle = \alpha \langle a, b \rangle$$

$$(iii) \quad \langle a, 0 \rangle = \langle 0, a \rangle = 0$$

$$(iv) \langle a, \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu} a_{\nu} \rangle = \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu} \langle a, a_{\nu} \rangle \text{ und } \langle \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu} a_{\nu}, a \rangle = \sum_{\nu=1}^n \bar{\alpha}_{\nu} \langle a_{\nu}, a \rangle$$

*Beweis.*

$$(i) \langle b + c, a \rangle = \overline{\langle a, b + c \rangle} = \overline{\langle a, b \rangle} + \overline{\langle a, c \rangle} = \langle b, a \rangle + \langle c, a \rangle$$

$$(ii) \langle \alpha a, b \rangle = \overline{\langle b, \alpha a \rangle} = \overline{\alpha \langle b, a \rangle} = \bar{\alpha} \langle a, b \rangle$$

$$(iii) \langle a, 0 \rangle = \langle a, 0 \cdot 0 \rangle = 0 \langle a, 0 \rangle = 0 = 0 \langle 0, a \rangle = \langle 0 \cdot 0, a \rangle = \langle 0, a \rangle$$

(iv) folgt induktiv aus (S1) und (S2) sowie (i) und (ii)

□

$$\|a\| := \sqrt{\langle a, a \rangle}, d(a, b) = \|a - b\|$$

**Proposition 6.1.2** (Parallelogramm-Gleichung). *In einem euklidischen oder unitären Raum  $V$  gilt:  $\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2 \forall a, b \in V$*

*Beweis.* siehe Übungsaufgabe

□

**Proposition 6.1.3.** *Es gilt für  $a, b, \in V$*

$$(i) \langle a, b \rangle = \frac{1}{4} (\|a + b\|^2 - \|a - b\|^2), \text{ falls } V \text{ ein euklidischer Raum ist}$$

$$(ii) \langle a, b \rangle = \frac{1}{4} (\|a + b\|^2 - \|a - b\|^2 - i\|a + ib\|^2 + \|a - ib\|^2), \text{ falls } V \text{ ein unitärer Raum ist (Polarisationsgleichung)}$$

*Beweis.*

$$(i) \frac{1}{4} (\langle a + b, a + b \rangle - \langle a - b, a - b \rangle) = \frac{1}{4} (\langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle + \langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle - \langle a, a \rangle + \langle -b, -b \rangle + \langle a, -b \rangle - \langle -b, a \rangle)$$

(ii) [Platzhalter]

□

**Satz 6.1.1** (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). *In einem euklidischen oder unitären Vektorraum gilt:*

$|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\| \quad \forall a, b \in V$  mit Gleichheit genau dann wenn  $a$  und  $b$  linear abhängig sind

*Beweis.* Es sei  $a, b, \in V$  und o.B.d.A  $a \neq 0$ . Sei nun  $\alpha = \frac{\langle a, b \rangle}{\langle a, a \rangle}$ . Dann gilt

$$0 \leq \|b - \alpha a\|^2 = \langle b, b \rangle + \langle \alpha a, \alpha a \rangle - \langle b, \alpha a \rangle - \langle \alpha a, b \rangle$$

$$= \frac{1}{\langle a, a \rangle} (\langle a, a \rangle \langle b, b \rangle + \langle a, b \rangle \langle b, a \rangle - \langle a, b \rangle \langle b, a \rangle - \langle b, a \rangle \langle a, b \rangle) = \frac{1}{\langle a, a \rangle} \|a\|^2 \|b\|^2 - |\langle a, b \rangle|^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \|a\|^2 \|b\|^2 - |\langle a, b \rangle|^2$$

$$\Rightarrow |\langle a, b \rangle|^2 \leq \|a\|^2 \|b\|^2 \text{ mit } \Leftrightarrow b = \alpha a, \text{ d.h. } a \text{ und } b \text{ sind linear abhängig}$$

□

**Folgerung:**

$$(i) \left| \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} b_{\nu} \right| \leq \sqrt{\sum_{\nu=1}^n a_{\nu}^2} \sqrt{\sum_{\nu=1}^n b_{\nu}^2} \text{ für alle } a, b \in \mathbb{R}^n (n = 3, \text{ Übung Aufgabe auf Blatt 11})$$

$$(ii) \left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx} \text{ für } f, g \text{ stetig in } [a, b]$$

**Definition 6.1.2.** In einem euklidischen Raum  $V$  heißt  $\varphi = \angle(a, b) := \arccos\left(\frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}\right)$  der Winkel zwischen  $a, b \in V \setminus \{0\}$  (Beachte  $\frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|} \in [-1, 1]$  gemäß Satz 1.1 (C.-S.))

**Proposition 6.1.4.** In einem euklidischen oder unitären Raum  $V$  über  $K$  gilt für alle  $a, b \in V, \alpha \in K$

$$(N1) \quad \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \text{ (Dreiecksungleichung)}$$

$$(N2) \quad \|\alpha a\| = |\alpha| \|a\|$$

$$(N3) \quad \|a\| \geq 0 \text{ und } = 0 \text{ genau dann wenn } a = 0$$

$$(\tilde{N}1) \quad \|a + b\| \geq \left| \|a\| - \|b\| \right|$$

*Beweis.*

$$(N1) \quad \|a + b\|^2 = \langle a + b, a + b \rangle = \langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle + \langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\Re \langle a, b \rangle \stackrel{\text{C-S}}{\leq} \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\|\|b\| = (\|a\| + \|b\|)^2$$

$$(N2) \quad \|\alpha a\|^2 = \alpha \bar{\alpha} \langle a, a \rangle = |\alpha|^2 \|a\|^2$$

$$(N3) \quad \text{wegen Definition 1.2 und (S4)}$$

$$(\tilde{N}1) \quad \|a\| = \|a + b - b\| \leq \|a + b\| + \|b\| \Rightarrow \|a + b\| \geq \left| \|a\| - \|b\| \right|$$

□

**Bemerkung:** Einen Vektorraum  $V$  über  $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$  mit einer Abbildung  $\|\cdot\| : \mathbb{R} \rightarrow K$ , die (N1)-(N3) erfüllt, heißt ein sog. normierter Raum (vergleiche Funktional-Analysis)

## 6.2 Orthogonalität

**Definition 6.2.1.** Es sei  $V$  ein euklidischer oder unitärer Raum. Man nennt:

(i)  $a, b \in V$  zu einander orthogonal, falls gilt  $\langle a, b \rangle = 0$  (Schreibweise  $a \perp b$ )

(ii)  $\{a_\nu\} \subset V$  ein(e)

- Orthogonalsystem (OGS), falls gilt  $a_\mu \perp a_\nu \forall \mu \neq \nu$
- Orthonormalsystem (ONS), falls zusätzlich gilt  $\|a_\nu\| = 1 \forall \nu$ , d.h.  $\langle a_\mu, a_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu} \forall \mu, \nu$
- Orthogonalbasis (ONB), falls sie ein ONS und eine Basis von  $V$  ist

**Bemerkung:**  $0 \perp a \forall a \in V$

**Beispiel:**  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ist eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^n$  oder  $\mathbb{C}^n$  bzgl. des kanonischen Skalarprodukts

**Satz 6.2.1** (Pythagoras). In einem euklidischen oder unitären Raum  $V$  gilt für alle  $a, b \in V$ :  $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$  falls  $a \perp b$

*Beweis.*  $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + \langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle = \|a\|^2 + \|b\|^2$  □

**Folgerung:** Es sei  $\{a_\nu\}$  ein OGS, dann gilt:

$\|\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu a_\nu\|^2 = \sum_{\nu=1}^n |\alpha_\nu|^2 \|a_\nu\|^2$   
 Insbesondere  $\sum_{\nu=1}^n |a_\nu|^2$  wenn  $\{a_\nu\}$  ein ONS ist.

**Proposition 6.2.1.** Jedes Orthogonalsystem  $\{a_\nu\}$  mit  $a_\nu \neq 0 \forall \nu$  in einem euklidischen oder unitären Raum ist linear unabhängig, insbesondere jedes Orthonormalsystem

*Beweis.*  $\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu a_\nu \Rightarrow 0 = \langle a_\mu, 0 \rangle = \langle a_\mu, \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu a_\nu \rangle = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu \langle a_\mu, a_\nu \rangle = \alpha_\mu \langle a_\mu, a_\mu \rangle \Rightarrow \alpha_\mu = 0$ , da  $\langle a_\mu, a_\mu \rangle > 0$ , da  $a_\mu \neq 0 \forall \mu = 1, \dots, n \Rightarrow \{a_\nu\}$  ist linear unabhängig. □

**Satz 6.2.2** (Gram-Schmidt). Jeder endlich-dimensionale euklidische oder unitäre Raum besitzt eine Orthonormalbasis.

Der folgende Beweis liefert das

**Korollar 6.2.1** (Orthonormalbasisergänzungssatz). Jedes Orthonormalsystem in einem endlich-dimensionalen euklidischen/unitären Raum kann zu einer Orthonormalbasis ergänzt werden

*Beweis.* konstruktiv mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren

Es sei  $\{b_1, \dots, b_n\}$  eine Basis des vorgegebenen endlich-dimensionalen Vektorraum gemäß Kapitel 1 Korollar 4.3 bzw. die Ergänzung eines vorgegebenen ONS  $\{b_1, \dots, b_m\}$  zu einer Basis  $\{b_1, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_n\}$  (beachte Proposition 2.1) (gemäß Kapitel 1 Satz 4.3)

Wir konstruieren rekursiv eine ONB  $\{a_1, \dots, a_k\}$  der Unterräume  $U_k = \text{Lin}\{b_1, \dots, b_k\}$  für  $k = 1, \dots, n$  bzw. für  $k = m + 1, \dots, n$ , wobei  $a_\nu = b_\nu$  für  $\nu = 1, \dots, m$

$\tilde{a}_1 := b_1, a_1 := \frac{1}{\|\tilde{a}_1\|} \tilde{a}_1$  ( $\tilde{a}_1 = b_1 \neq 0$ , denn  $b_1$  ist linear unabhängig)

$\tilde{a}_{k+1} = b_{k+1} - \sum_{\nu=1}^k \langle a_\nu, b_{k+1} \rangle a_\nu$  und  $a_{k+1} := \frac{1}{\|\tilde{a}_{k+1}\|} \tilde{a}_{k+1}$  ( $\tilde{a}_{k+1} \neq 0$ , weil  $b_1, \dots, b_{k+1}$  l.u. sind) für  $k = 1, \dots, n - 1$  (bzw.  $k = m, \dots, n - 1$ )

$\Rightarrow \{a_1\}$  ist Basis von  $U_1 = \text{Lin}\{b_1\}$ . Nun seien  $\{a_1, \dots, a_k\}$  eine Basis von  $U_k$  gemäß dieser Konstruktion.

$\Rightarrow \{a_1, \dots, a_{k+1}\}$  ist eine Basis von  $U_{k+1} = \text{Lin}\{b_1, \dots, b_{k+1}\}$  gemäß dem Austauschlemma (Kapitel 1.4). Weiter gilt  $\langle a_\mu, a_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu} \forall \nu, \mu = 1, \dots, k$  und  $\|a_{k+1}\| = 1$ . Es bleibt zu zeigen:

$\tilde{a}_{k+1} \perp a_\mu \forall \mu = 1, \dots, k$ :  $\langle a_\mu, \tilde{a}_{k+1} \rangle = \langle a_\mu, b_{k+1} \rangle - \sum_{\nu=1}^k \langle a_\nu, b_{k+1} \rangle \langle a_\nu, a_\mu \rangle \stackrel{\langle a_\nu, a_\mu \rangle = \delta_{\mu\nu}}{=} \langle a_\mu, b_{k+1} \rangle - \langle a_\mu, b_{k+1} \rangle = 0 \forall \mu = 1, \dots, k$  □

**Bemerkung:**

(i) Das Verfahren bricht genau dann ab, wenn gilt  $\tilde{a}_{k+1} = 0 \Leftrightarrow b_1, \dots, b_{k+1}$  linear abhängig

- (ii)  $\tilde{a}_{n+1} = b_{k+1} - \sum_{\nu=1}^k \langle a_\nu, b_{k+1} \rangle a_\nu \perp a_\mu \forall \mu = 1, \dots, k$   
 $\Rightarrow \tilde{a}_{k+1} \perp u \forall u \in U_k = \text{Lin}(a_1, \dots, a_\nu) = \text{Lin}(b_1, \dots, b_k)$   
 $\Rightarrow \tilde{a}_\mu$  sind die Höhen im Parallelepiped  $\Pi = \{\sum_{\nu=1}^n \beta_\nu b_\nu \mid 0 \leq \beta_\nu \leq 1 \text{ für } \nu = 1, \dots, n\}$

(iii) Gemäß Satz 2.1 gilt  $\|b_{k+1}\|^2 = \|\tilde{a}_{k+1}\|^2 + \sum_{\nu=1}^n |\langle a_\nu, b_{k+1} \rangle|^2 \Rightarrow \|b_{k+1}\| \geq \|\tilde{a}_{k+1}\|$   
mit = genau dann wenn  $b_{k+1} \perp u \in U_k$

**Beispiel:** für (G-S):  $V = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$  mit dem kanoni-

schen Skalarprodukt  $\langle a, b \rangle = \sum_{\nu=1}^3 a_\nu b_\nu$

$$\tilde{a}_1 = b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_2 = b_2 - \langle a_1, b_2 \rangle a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(-3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_3 = b_3 - \langle a_1, b_3 \rangle a_1 - \langle a_2, b_3 \rangle a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}(-1) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist ein ONB von } V = \mathbb{R}^3 \text{ und } b_1, b_2, b_3 \text{ sind}$$

linear unabhängig

**Korollar 6.2.2.**  $(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n)C$  mit oberer Dreiecksmatrix  $C$ , genauer  $a_k = \sum_{\nu=1}^k c_{\nu k} b_\nu$  mit  $c_{kk} = \frac{1}{\|\tilde{a}_k\|}$  für  $k = 1, \dots, n$

### 6.3 Gramsche Determinanten und Volumina

[Platzhalter]

**Bemerkung:** Das Volumen des Parallelepipeds  $\Pi := \{\sum_{\nu=1}^n \beta_\nu b_\nu \mid 0 \leq \beta_\nu \leq 1, \nu = 1, \dots, n\}$  ist gemäß Korollar 2.2 und der obigen Bemerkung gegeben durch folgende Formel:  $v(\Pi) = \text{Produkt der Höhen} = \|\tilde{a}_1\| \cdots \|\tilde{a}_n\| = (\det C)^{-1}$

und  $1 = \det I = \det(\langle a_\mu, a_\nu \rangle) = \det(\overline{C}^T(\langle b_\mu, b_\nu \rangle)C) = (\det C)^2 \det(\langle b_\mu, b_\nu \rangle) = v(\Pi)^{-2} \det(\langle b_\mu, b_\nu \rangle)$

**Definition 6.3.1.** Es sei  $V$  ein euklidischer oder unitärer Raum und  $b_1, \dots, b_n \in V$ . Dann heißt

- (i)  $(\langle b_\mu, b_\nu \rangle) \in K^{n \times n}$  die Gramsche Matrix von  $b_1, \dots, b_n$

(ii)  $G(b_1, \dots, b_n) := \det(\langle b_\mu, b_\nu \rangle)$  die Gramsche Determinante von  $b_1, \dots, b_n$

(iii)  $v(b_1, \dots, b_n) = \sqrt{G(b_1, \dots, b_n)}$  das  $n$ -dimensionale Volumen des Parallelepipeds  
 $\Pi := \{\sum_{\nu=1}^n \beta_\nu b_\nu \mid 0 \leq \beta_\nu \leq 1, \nu = 1, \dots, n\}$

Aus der Gram-Schmidt-Orthogonalisierung und obiger Bemerkungen folgt

**Satz 6.3.1.** *Es seien  $V$  ein euklidischer oder unitärer Raum und  $b_1, \dots, b_n \in V$ . Dann gilt*

(i)  $G(b_1, \dots, b_n) \leq 0$  mit  $= 0 \Leftrightarrow b_1, \dots, b_n$  sind linear abhängig

(ii)  $G(b_1, \dots, b_n) \geq \|b_1\|^2 \cdots \|b_n\|^2$  und  $= \Leftrightarrow \{b_1, \dots, b_n\}$  sind ein ONS

**Bemerkung:** Für  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}^m$  oder  $\mathbb{R}^m$  mit dem kanonischen Skalarprodukt  $\langle a, b \rangle := \bar{a}^T b$  gilt für

$A := (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{m \times n}$  und die Gramsche Matrix  $(\langle a_\mu, a_\nu \rangle) = (\bar{a}_\mu^T a_\nu) = \bar{A}^T A = A^* A$  und die Gramsche Determinante  $G(a_1, \dots, a_n) = \det(A^* A) \geq 0$  und  $v(a_1, \dots, a_n) = \sqrt{\det(A^* A)}$

Weiter gilt (Übungsaufgabe 31 — Satz 2.5.5):  $\text{Kern}(A^* A) = \text{Kern } A$  und  $\mathbb{C}^m = \text{Im } A \oplus \text{Kern } A^*$

Im Falle  $m = n$  folgt  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $G(a_1, \dots, a_n) = |\det A|^2$ ,  $v(a_1, \dots, a_n) = |\det A|$

Es folgt aus Satz 3.1 das

**Korollar 6.3.1** (Hadamardsche Ungleichung). Für  $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  gilt:  
 $|\det A| \leq \|a_1\| \cdots \|a_n\|$  mit  $= \Leftrightarrow \{a_1, \dots, a_n\}$  sind ein OGS, wobei  $\|x\| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^n |x_\nu|^2}$

**Beispiel:**

## 6.4 Projektionen

**Definition 6.4.1.** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$ . Ein linearer Operator  $p \in L(V, V)$  heißt eine Projektion, falls gilt:  $p^2 = p \circ p = p$

**Bemerkung:**

(i)  $p \in L(V, V)$  sei eine Projektion  $\Rightarrow V = \text{Im } p \oplus \text{Kern } p$  [Probeklausur Aufgabe 8]

(ii) Matrixdarstellung:  $p(x) = Ax \in L(K^n, K^n)$  für  $A \in K^{n \times n}$ . Dann gilt  $A^2 = A \Leftrightarrow p$  ist eine Projektion

**Satz 6.4.1** (allgemeine Projektion). Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$ . Dann gilt:

(i) Ein linearer Operator  $p \in L(V, V)$  ist genau dann eine Projektion, wenn gilt:  
 $p(x) = x \forall x \in \text{Im } p$  und  $V = \text{Im } p \oplus \text{Kern } p$

(ii) Seien  $U$  und  $\tilde{U}$  Komplementärunterräume d.h.  $V = U \oplus \tilde{U}$ , dann ist  $p(x) = u$  für  $x = u + \tilde{u}$  mit  $u \in U, \tilde{u} \in \tilde{U}$ , eine Projektion